



Appunti di Fisica _I
Secondo semestre
Corpi rigidi
Energia cinetica e potenziale

Sommario

Un pò di ripasso.....	1
Energia cinetica.....	2
Il momento angolare e la seconda equazione canonica.....	3
Il lavoro delle forze.....	4
Due masse a distanza fissa.....	5
Una carrucola.....	6
Una cilindro che ruota senza scivolare.....	7
Ed una palla che ruota su di un piano inclinato senza scivolare?.....	9
Un corpo sospeso ovvero pendolo composto.....	9
Una scala al muro.....	10
Rotore.....	12

Un pò di ripasso...

Momenti angolare

1. Il momento angolare totale è la somma del momento angolare del centro di massa più il momento angolare rispetto al centro di massa. (dimostrato) $\mathbf{L}=\mathbf{L}_b+\mathbf{L}_r$
2. Il momento angolare \mathbf{L}_{cm} rispetto al centro di massa è uguale al momento angolare nel centro di massa.

$$\vec{L}_{cm} = \sum m_i \vec{r}_{bi} \wedge \vec{v}_i = \sum m_i \vec{r}_{bi} \wedge (\vec{v}_b + \vec{v}_{bi}) = \sum \cancel{m_i \vec{r}_{bi} \wedge \vec{v}_b} + \sum m_i \vec{r}_{bi} \wedge \vec{v}_{bi} = \vec{L}_r$$

Momenti delle forze

3. Il momento delle forze rispetto ad un punto O è la somma del momento della risultante delle forze calcolato rispetto al C.M. più il momento delle forze rispetto al C.M.

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{bO} \wedge \vec{F}^E + \vec{M}_b^E$$



4. *Il momento delle forze esterne rispetto al centro di massa è uguale al momento risultante nel riferimento del centro di massa.*

$$\vec{M}_{cm} = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \wedge (\vec{F}_{ib} + m_i \vec{a}_b) = \sum \vec{r}_i \wedge m_i \vec{a}_b + \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

dove $m_i \vec{a}_b$ sono le forze apparenti nel sistema baricentrale .

5. *Le forze costanti e proporzionali alla massa, hanno momento nullo rispetto al centro di massa.*

$$\vec{M}_{cm} = \sum \vec{r}_{bi} \wedge \vec{F}_i = \sum \vec{r}_{bi} \wedge m_i \vec{f} = (\sum \vec{r}_{bi} m_i) \wedge \vec{f} = 0$$

poichè le coordinate del C.M. nel sistema C.M. sono nulle!

Energia cinetica

L'energia cinetica di un corpo è legata alla velocità angolare di rotazione attorno al suo C.M..

$$1) \quad T = \frac{1}{2} \int_M v^2 dm = \frac{1}{2} \int_M (\vec{v}_b + \vec{v}')^2 dm = \frac{1}{2} \int_M (v_b^2 + 2 \vec{v}_b \cdot \vec{v}' + v'^2) dm = \frac{1}{2} M v_b^2 + \int_M \frac{1}{2} v'^2 dm$$

che possiamo sviluppare ancora.

Per semplificare la rappresentazione ricordiamo la definizione di media di una variabile x distribuita secondo una probabilità o peso $p(x) dx = dp$:

$$2) \quad \bar{x} = \frac{1}{P} \int_p x p(x) dx = \frac{1}{P} \int_p x dp \quad \text{con} \quad P = \int dp$$

nel caso del calcolo del centro di massa... $dm = d\mu$

$$\vec{R}_c = \frac{1}{M} \int_M \vec{r} \rho(\vec{r}) dv = \vec{r}$$

Sfruttando quanto detto ecco e la proprietà distributiva della operazione di media

$$3) \quad T = \frac{1}{2} M \overline{(v_b^2 + 2 \vec{v}_b \cdot \vec{v}' + v'^2)} = \frac{1}{2} M (\overline{v_b^2} + 2 \overline{\vec{v}_b \cdot \vec{v}'} + \overline{v'^2}) = \frac{1}{2} M v_b^2 + \frac{1}{2} M \overline{v'^2}$$

Il secondo termine si annulla perchè la media della velocità v' calcolata nel C.M. è nulla.



Il terzo termine va espresso in termini della velocità angolare di rotazione.

$$4) \quad T' = \frac{1}{2} \int_M (\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int_M d^2 dm = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2$$

dove I_ω è il momento di inerzia assiale del corpo rispetto all'asse di rotazione.

Questa con la 3) dimostra il teorema di König :

L'energia cinetica di un corpo dotato di velocità v_b e moto rotazionale ω è data dalla somma della energia cinetica del corpo come se fosse concentrato nel C.M. più l'energia di rotazione attorno al C.M..

Supponiamo ora di voler calcolare l'energia cinetica rispetto ad un asse di rotazione z' decentrato di a rispetto al C.M. Quanto vale l'energia cinetica rispetto a questo nuovo asse? L'energia di rotazione è sempre data in funzione della distanza dei punti del corpo da questo nuovo asse e dalla velocità angolare di rotazione attorno a questo. Parto dalla formula 4) dove aggiungo ad \vec{r} il vettore costante che unisce un punto O (il nuovo polo) del nuovo asse z' con il C.M..

$$5) \quad T' = \frac{1}{2} \int_M (\vec{\omega} \wedge (\vec{\delta} + \vec{r}))^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int_M \delta^2 dm + \frac{\omega^2}{2} \int_M d^2 dm = \frac{1}{2} M \delta^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_\omega \omega^2$$

che esprime il teorema di Huygens-Steiner:

L'energia cinetica di un corpo rigido che ruota di velocità angolare ω rispetto ad un asse non baricentrale distante d dal centro di massa, si esprime come la somma dell'energia cinetica del corpo come se tutta la massa fosse concentrata nel C.M. con velocità $d\omega$ più l'energia di rotazione attorno al C.M..

Ci dice anche che il momento d'inerzia assiale rispetto ad un asse spostato di d rispetto al C.M. è (teorema di Huygens-Steiner):

$$6) \quad I_\delta = I_\omega + M \delta^2$$

Una formuletta mica male?

Il momento angolare e la seconda equazione canonica

Il momento angolare in genere si calcola rispetto ad un polo fisso e la sua derivata corrisponde al momento delle forze esterne applicate al corpo mobile.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e$$



Che accade nel caso più generale in cui il polo P è mobile con velocità v_p ?
Calcoliamo la derivata rispetto al tempo. (già visto...!)

$$\frac{d\vec{L}_p}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \vec{r}_{pi} \wedge \vec{q}_i = \sum \dot{\vec{r}}_{pi} \wedge \vec{q}_i + \sum \vec{r}_{pi} \wedge \dot{\vec{q}}_i$$

$$7) \quad \frac{d\vec{L}_p}{dt} = \sum (\vec{v}_i - \vec{v}_p) \wedge \vec{q}_i + \sum \vec{r}_{pi} \wedge \dot{\vec{q}}_i = -\vec{v}_p \wedge \vec{Q} + \sum \vec{r}_{pi} \wedge \dot{\vec{q}}_i$$

ovvero

$$\dot{\vec{L}}_p = \vec{M}_p - \vec{v}_p \wedge \vec{Q}$$

Se la quantità di moto totale è nulla o se P corrisponde con il C.M., o se la velocità del punto P è parallela alla direzione di Q (cioè alla velocità del C.M.) l'equazione si riduce a quella classica. Si noti solo che il momento angolare rispetto al punto mobile P considera alla stessa stregua le forze reali e quelle apparenti!

Il lavoro delle forze

Il corpo è immerso in un campo di forze e vediamo come calcolare il lavoro.

$$7a) \quad dL = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} dV = \int \vec{F} \cdot (\vec{v}_b + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) dt dV = \int \vec{F} \cdot \vec{v}_b dt dV + \int \vec{F} \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{r} dt dV$$

$$\vec{R} \cdot \vec{v}_b dt + \int \vec{r} \wedge \vec{F} dV \cdot \vec{\omega} dt = \vec{R} \cdot \vec{v}_b dt + \vec{M} \cdot \vec{\omega} dt = \vec{R} \cdot d\vec{r} + \vec{M} \cdot d\vec{\phi}$$

e le forze interne, che si annullano a coppie, non danno contributo. *Il lavoro dipende solo dalle forze esterne che contano solo come risultante e momento*
Questo risultato è notevole e se ne deve tener sempre di conto.

Ebbene come conciliare questo risultato con il fatto che un'auto, un aereo, un razzo, si muovono nello spazio grazie allo sforzo fatto dal motore? Il motore è interno e non interviene nella prima equazione cardinale.

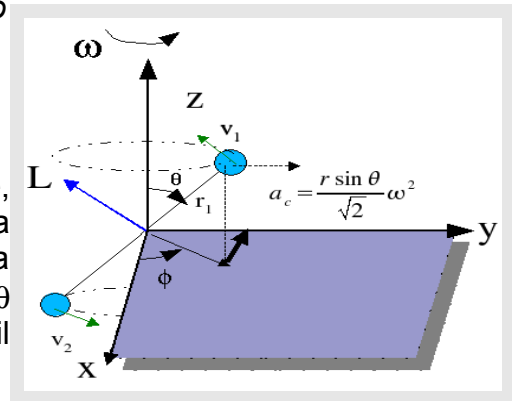


Ma analizziamo più attentamente. Le ruote dell'auto sono in contatto con la strada e fanno attrito, quasi completo direi. Nasce una forza di *attrito statico* nel punto di contatto che è istantaneamente fermo ed evita alle ruote di scivolare determinando la spinta in avanti del mezzo e ... ma queste forze non fanno lavoro! Il lavoro è fatto dalle forze interne...

Conclusione: un semovente non è un corpo rigido!

Due masse a distanza fissa

Due masse identiche di raggio trascurabile, sono connesse da una asta rigida di massa trascurabile e di lunghezza $2r$. Il sistema ruota attorno all'asse z del lab con un angolo di θ gradi e una velocità ω costante. Calcola il momento angolare?



I gradi di libertà sono veramente pochi! Solo uno, basta infatti l'angolo ϕ di rotazione attorno all'asse z verticale per fissare tutto; come dire basta una equazione per conoscerne il moto e visto che non ci sono forze esterne il sistema è destinato a ruotare a velocità costante attorno al suo asse verticale!

Ma vogliamo capire qui anche le ragioni dinamiche che entrano in gioco, quindi partiamo dai parametri cinematici importanti che sono fissati nel seguente schema:

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= -\vec{r}_1 & \phi &= \omega t & \vec{v}_1 &= \vec{\omega} \wedge \vec{r}_1 & \vec{v}_2 &= -\vec{v}_1 \\ \vec{r}_1 &\equiv r(\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) & \vec{\omega} &\equiv \omega(0, 0, 1) \\ \vec{v}_1 &\equiv \omega r(-\sin\theta \sin\phi, \sin\theta \cos\phi, 0) \end{aligned}$$

8)

la componente del momento angolare verticale sarà costante visto che deve ruotare a velocità costante, ma il momento angolare totale? Quanto vale?

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \wedge m \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \wedge m \vec{v}_2 = 2(\vec{r}_1 \wedge m \vec{v}_1) = 2(\vec{r}_1 \wedge m(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_1))$$

eliminiamo l'indice a r

$$\vec{L} = 2m(r^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r})$$

9)

$$\vec{L} \equiv 2mr^2 \omega(-\cos\theta \cos\phi, -\cos\theta \sin\phi, \sin\theta^2) \quad \text{not } \|\vec{\omega}\| ???$$

è costante in modulo, ma non in direzione! Rota con ϕ !



Si scopre che il momento angolare, come del resto abbiamo più volte notato, non è parallelo al vettore omega, nè costante in quanto gira (fa una precessione di ωt) attorno all'asse z!. Del resto l'asse individuato da omega non è un asse di simmetria del nostro sistemino. Anzi si nota anche che le masse risentano di una forza centrifuga che ovviamente tende ad allargare l'angolo che l'asta fa con l'asse zeta. Derivando la 9) e con un pò di algebra....

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} \equiv 2mr^2 \omega^2 \cos \theta (\sin \phi, -\cos \phi, 0)$$

si trova il momento della *forza centrifuga* che è contrastato dalla reazione meccanica tra l'asta ed il punto di incernierazione nell'origine. Poichè il sistemino ruota, la reazione ruota pure.. e proprio quello che accade alle ruote della nostra auto quando non sono bene equilibrate che fanno vibrare fastidiosamente e pericolosamente il mozzo della ruota e poi anche il volante.

Una carrucola

Si immagina un cilindro (R,h,M) orizzontale fissato su di una parete, ma libero di ruotare attorno al suo asse senza attrito.

Un filo avvolto sul cilindro regge una massa di peso m. Come ruota il cilindro sotto la trazione del peso? Anche qui un solo grado di libertà e quindi una equazione basta.

Si risolve con l'equazione cardinale, componente parallela all'asse di rotazione.

Ci occorre conoscere il momento di inerzia del cilindro rispettivamente al suo asse . Il momento delle forze rispetto all'asse è dato dalla forza trasmessa dalla tensione del filo per il braccio $b=R$; La tensione del filo dipende dal peso del grave e dalla sua accelerazione. Ecco l'equazione del moto:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= I \dot{\omega} = T R \\ m z &= mg - T \quad \text{con } z = R \dot{\omega} \quad \text{si ha} \\ T &= mg - m R \dot{\omega} \quad \text{segue} \\ I \dot{\omega} &= mgR - m R^2 \dot{\omega} \\ \dot{\omega} &= \frac{mgR}{I + m R^2} \end{aligned}$$

10)



Moto uniformemente accelerato!
e introducendo esplicitamente il momento di inerzia del cilindro che lo conosciamo $\frac{1}{2}MR^2$.

$$10a) \quad \dot{\omega} = \frac{mgR}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2} = \frac{1}{R} \frac{2mg}{M+2m} \quad a = R \dot{\omega} = \frac{2m}{M+2m} g$$

Si risolve con la conservazione dell'energia.

Possiamo anche ricordarci che il sistema, se non ci sono attriti è conservativo e pertanto, con v la velocità del grave e con h la sua altezza:

$$11) \quad E = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 + mgh$$

Visto che $v = dh/dt$ e $v = \omega R$, derivo rispetto al tempo

$$12) \quad I \dot{\omega} \omega + m R^2 \dot{\omega} \omega + mgR \omega = 0$$
$$\dot{\omega} = \frac{mgR}{I + m R^2}$$

cvd

Una cilindro che ruota senza scivolare

Ancora un solo grado di libertà.

Un ruota piena (cilindro) di raggio R e massa M è soggetto ad una forza esterna F :
calcolare il moto?

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_r$$

Q è quantità di moto totale, F_r è la reazione vincolare al punto di contatto, per il momento incognita. Questa incognita potrà essere ricavata a posteriori.

Usiamo allora la seconda equazione cardinale.

Il punto di contatto del mobile con la terra è fermo istante per istante (definizione di puro rotolamento) e possiamo scrivere la seconda equazione cardinale rispetto a



quel punto, (*così la reazione non appare!*), ma attenzione il polo si muove! D'altra parte visto che il moto del punto è parallelo al moto del C.M., vedi le 7) , segue:

$$\dot{L} = I \dot{\omega} = (I_b + M R^2) \dot{\omega} = R F$$

da cui $\omega = \frac{R F}{I} t + \text{cost.}$

13) $v = R \omega = \frac{2}{3} \frac{F}{M} t$ con $I_b = \frac{1}{2} M R^2$ cost.=0

Moto uniformemente accelerato che non dipende solo dalla massa del sistema, ma anche dal suo momento di inerzia; è più lento che nel caso in cui scivoli senza attrito e senza rotolare! L'attrito qui è fondamentale!

La velocità del C.M. è più bassa poiché parte della energia ceduta dal lavoro esterno va in energia di rotazione.

Anche con il teorema delle forze vive te ne rendi conto! L'energia cinetica (teorema H.S.) è la somma di quella baricentrale più quella di traslazione:

13)
$$T = \frac{1}{2} I_b \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2$$
$$dT = (I_b + M R^2) \dot{\omega} \omega dt = F ds = F R \omega dt$$
$$(I_b + M R^2) \dot{\omega} = F R$$
$$M R \dot{\omega} = \frac{2}{3} F$$

che porta allo stesso risultato.

Come aumenta l'energia di rotazione interna? Per questo ci deve essere un momento delle forze esterne rispetto al C.M. che aumenta la velocità angolare del corpo. La forza può essere solo quella di reazione vincolare F_r che si esplica nel punto di contatto e che è contraria alla direzione del moto del C.M..

13a)
$$\frac{dQ}{dt} = M a_b = M R \dot{\omega} = F + F_r$$

sostituendo

$$F_r = -\frac{1}{3} F$$



Ecco che si vede di nuovo l'importanza della forza di attrito e che l'accelerazione di traslazione del mobile, vedi la prima equazione cardinale, è giustamente minore di quella aspettata.

Ed una palla che ruota su di un piano inclinato senza scivolare?

Il momento d'inerzia è $\frac{2}{5} M R^2$ la forza è $F = Mg \sin(\theta)$ poi il problema è nuovamente simile a quello di prima. La reazione vincolare perpendicolare al piano annulla la componente $Mg \cos(\theta)$, poi tutto va quasi come prima.

$$(I_b + M R^2) \dot{\omega} = \frac{7}{5} M R^2 \dot{\omega} = Mg R \sin \theta$$

14)

$$a = R \dot{\omega} = \frac{5}{7} g \sin \theta$$

L'accelerazione è $\frac{5}{7}$ di quella in cui la pallina non rotola ed è indipendente dalle dimensioni della sfera.

Si può anche impiegare la conservazione della energia.

$$T = \frac{1}{2} I_s \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} \frac{7}{5} M R^2 \omega^2$$

15)

$$E = \frac{7}{10} M R^2 \omega^2 + M g z \sin \theta \quad \text{derivando con } \dot{z} = R \omega$$
$$\frac{7}{5} M R^2 \dot{\omega} + M g R \sin \theta = 0$$

che è essenzialmente la 14).

Ricorda Galileo, che ha studiato il moto con sfere che correvano su di un piano inclinato!

Un corpo sospeso ovvero pendolo composto

Un corpo sospeso ad un asse in campo gravitazionale è libero di oscillare. Quale è il moto?

Il solido può solo ruotare attorno all'asse di sospensione, quindi conoscendo il momento di inerzia baricentrale assiale del corpo e la distanza dell'asse di sospensione dal centro di massa si scrive la seconda equazione cardinale:



$$16) \quad \dot{L} = I_n \ddot{\theta} = -Mgd \sin \theta \quad \omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I_n}}$$
$$I_n = I_b + Md^2$$

mentre l'equazione di un pendolo semplice si scrive

$$17) \quad l \ddot{\theta} = -Mg \sin \theta \quad \omega = \sqrt{\frac{Mg}{l}}$$

da cui un pendolo composto si comporta come un pendolo semplice di lunghezza

$$18) \quad l = \frac{I_n}{Md} = d + \frac{I_b}{Md}$$

Una scala al muro

La scala è appoggiata al muro, ma può scivolare poichè supponiamo il muro ed il pavimento perfettamente lisci (senza attrito).

Quindi ruota e trasla.. applichiamo le due equazioni cardinali dopo aver fissato un pò di parametri: lunghezza $2l$, massa M , momento d'inerzia assiale baricentrale I_b , angolo di inclinazione della scala rispetto alla verticale ϕ , infine le reazioni R_a perpendicolare al muro ed R_b perpendicolare al pavimento. Come sistema di riferimento del laboratorio prendiamo due assi, x, y con origine nel punto di incontro del pavimento con il muro e asse x parallelo al pavimento e direzione verso il punto di appoggio della scala.

Incognite l'angolo ϕ di inclinazione che è sufficiente per stabilire la posizione della scala ed eventualmente le due reazioni.

Visto che l'incognita principale è un angolo, comincia con l'esprimere le coordinate del C.M. in funzione di ϕ .

$$19) \quad \begin{aligned} x &= l \sin \phi & \dot{x} &= +l \dot{\phi} \cos \phi & \ddot{x} &= l \ddot{\phi} \cos \phi - l \dot{\phi}^2 \sin \phi \\ y &= l \cos \phi & \dot{y} &= -l \dot{\phi} \sin \phi & \ddot{y} &= l \ddot{\phi} \sin \phi - l \dot{\phi}^2 \cos \phi \end{aligned}$$



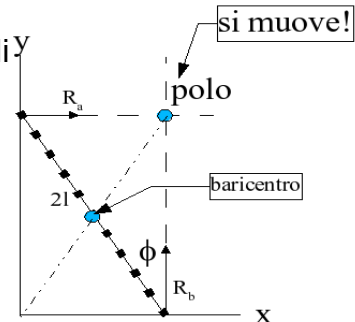
Imposta la prima equazione cardinale sulla quantità di moto:

$$19) \quad \frac{d\vec{Q}}{dt} = M \dot{\vec{v}}_b = \vec{R}_a + \vec{R}_b + m \vec{g}$$

ovvero in coordinate

$$M \ddot{x} = M (l \ddot{\phi} \cos \phi - l \dot{\phi}^2 \sin \phi) = -R_a$$

$$M \ddot{y} = M (l \ddot{\phi} \sin \phi - l \dot{\phi}^2 \cos \phi) = R_b - Mg$$



Poi imposti la seconda equazione cardinale sul momento della quantità di moto, praticamente una sola equazione scalare poichè il momento angolare visto il possibile moto della scala e la forza in gioco, è sempre perpendicolare al piano xy. Ora devi decidere la posizione dell'asse rispetto al quale calcolare il momento angolare.

Asse baricentrale:

$$20) \quad \vec{L}_O = I \dot{\phi} \quad \text{dove } I \equiv I_b \text{ rispetto asse } z$$

$$I_b \ddot{\phi} = -l R_a \cos \phi + l R_b \sin \phi$$

la forza peso non entra nell'equazione poichè il suo braccio rispetto all'asse baricentrale è nullo.

Da questa equazione con le 19) ricavi ϕ e le reazioni.

Se non sei interessato a conoscere immediatamente le reazioni, conviene trovare un asse, se esiste, rispetto al quale le reazioni hanno momento nullo. Esiste ed è banalmente individuato sul piano xy dalla intersezione di due rette, quella parallela all'asse x e che contiene la reazione R_a e l'altra perpendicolare che contiene la reazione R_b .

Questo punto che possiamo chiamare O' , è sullo spigolo di un rettangolo costituito da un lato x di base che va da O al piede della scala, un lato y verticale che va da O fino al punto di appoggio della scala sul muro. O' è lo spigolo opposto ad O e dista sempre da O di $2l$ (la diagonale del rettangolo)!. Nota O' è un polo mobile, ma fortunatamente si sposta descrivendo una circonferenza concentrica con la circonferenza descritta da C.M.. Le due velocità sono sempre parallele (vedi 7) e quindi l'equazione canonica è classica! La distanza del C.M. (centro scala e/o



centro del rettangolo) dallo spigolo O' è sempre la semi lunghezza della scala e pertanto l'inerzia si sa come cambia ed il momento angolare è dato da

$$(I_b + Ml^2) \dot{\phi} \quad \text{e il momento delle forze da} \quad M^e = Mgl \sin \phi$$

segue l'equazione cardinale

$$21) \quad (I_b + Ml^2) \ddot{\phi} = Mgl \sin \phi$$

che determina il moto. Attenti non è uno oscillatore per angoli piccoli, il secondo termine non è negativo!

Non è facilmente risolvibile, esiste sempre la possibilità numerica! Sfruttando poi le 19) si possono sempre calcolare anche le reazioni!

Veramente quello che ci interessa nella realtà è che la scala non scivoli; anzi possiamo chiederci quanto deve essere l'attrito sul pavimento (sul muro supponiamo sempre attrito nullo) affinché la scala rimanga in piedi ?

è un problema di statica che potrete fare come esercizio. ($\tan(\phi) < 2$ m).

Oppure vedete qui!

Supponiamo che l'attrito \mathbf{S}_1 sia proporzionale al peso della scala e che "a" sia il coefficiente di proporzionalità.

La quantità di moto è nulla se la scala deve stare ferma:

ovvero la reazione verticale al pavimento annulla il peso $\mathbf{R}_1 = Mg$ e la reazione verticale alla parete annulla la forza di attrito statica $\mathbf{R}_2 = \mathbf{S}_1$.

D'altra parte la scala non deve ruotare e quindi deve essere nullo anche il momento delle forze. Lo calcoliamo come prima rispetto al polo O' , ricordandoci però di introdurre una forza che tiene conto dell'attrito e cioè \mathbf{S}_1 che è orizzontale, è alla base della scala ed ha modulo $|\mathbf{S}_1| = aR_1 = aMg$ ed è diretta verso la parete.

Allora:

$$M^e = mgl \sin \phi - 2l \cos \phi S_1 = mgl (\sin \phi - 2a \cos \phi) = 0$$

da cui

$$\tan \phi = 2a \quad \text{e per } a = 0.5 \quad \text{abbiamo } \phi = 45^\circ \text{ al massimo!}$$

Rotore

Iniziamo con una ruota di bicicletta impernata su di un asse orizzontale appeso a due aste verticali. La ruota viene messa in rapida rotazione e immediatamente dopo una delle aste viene eliminata. Che accade?

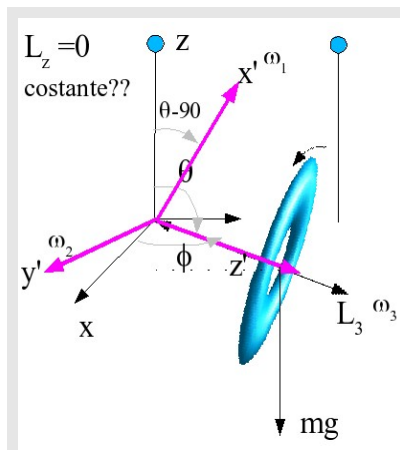


Costanti del moto:

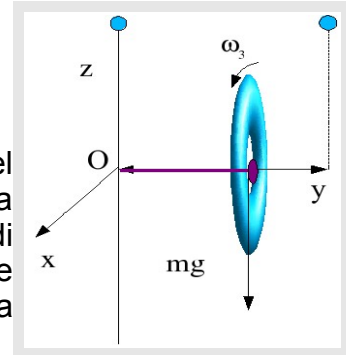
L'energia totale e la componente z del momento angolare .

Gradi di libertà:

3 , due per indicare la posizione del C.M. della ruota nel laboratorio e uno per indicare l'angolo di rotazione della ruota



rispetto ad un suo asse di riferimento interno; come dire che con tre angoli ce la caviamo!



Definizione dei sistemi di riferimento:

Il sistema di riferimento del lab è individuato dall'asta che resta in posizione verticale e definisce un asse z che passa per il punto O (origine del sistema) dove è fissato il pernio della ruota.

L'asse y è orizzontale e coincide con la posizione dell'asse della ruota giusto prima del distacco, mentre l'altro asse x, è orientato di conseguenza.

Un sistema di riferimento interno solidale con la ruota, è un sistema principale di inerzia con asse z' che coincide con l'asse della ruota, e gli assi x' e y' perpendicolari a z', giacenti sul piano ruota, ma di orientazione arbitraria attorno a z' per la simmetria cilindrica. Qui il tensore di inerzia è individuato dai valori I_x, I_y che sono identici e I_z che è diverso.

A noi conviene, visto che il centro ruota è a distanza fissa da O, prendere anche l'origine del sistema interno in O. Il tensore di inerzia non cambia molto poiché la simmetria cilindrica resta inalterata. Infatti il momento di inerzia assiale I_z non cambia e poniamo $I_3 = I_z$ mentre gli altri, che chiameremo I_1 e I_2 derivano dai corrispondenti I_x e I_y corretti di Md^2 per Koenig.

Questo sistema si individua nel lab con un angolo θ (z-z') e ϕ (angolo tra x e il piano z-z') che fissano la direzione dell'asse z' rispetto al sistema del lab. Poi occorre un angolo ψ che fissa l'orientazione del corpo attorno a z' ed un angolo ψ di rotazione attorno a z' per fissare l'orientazione del sistema di riferimento solidale con la ruota. Di fatto sono i tre angoli di Eulero che danno l'orientazione del corpo (ϕ, θ, ψ).

Sul sistema agisce la forza peso che tende a far cadere la ruota. Per studiarne il moto, piuttosto complicato, anzi un pò contrario al buon senso comune...sfruttiamo le leggi di conservazione e le equazioni cardinali e definiamo i parametri in gioco.



Per convenienza indichiamo i tre assi del sistema principale di inerzia con $1 \equiv x'$, $2 \equiv y'$, $3 \equiv z'$,

$$\vec{L} \equiv (L_x, L_y, L_z) \quad \vec{\omega} \equiv (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \quad \text{nel lab}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge m \vec{g} \quad \text{con ovviamente} \quad M_z = 0$$

proietto la velocità angolare ed il momento angolare sugli assi principali di inerzia

$$\omega_1 = \vec{\omega} \cdot \hat{x}' \quad \omega_2 = \vec{\omega} \cdot \hat{y}' \quad \omega_3 = \vec{\omega} \cdot \hat{z}'$$

dove \hat{x}' , \hat{y}' , \hat{z}' sono i versori degli assi x' , y' , z' rispetto al lab

$$22) \quad L_1 = \vec{L} \cdot \hat{x}' = I_1 \omega_1 \quad L_2 = \vec{L} \cdot \hat{y}' = I_2 \omega_2 \quad L_3 = \vec{L} \cdot \hat{z}' = I_3 \omega_3$$

ricordando che \vec{r} per costruzione è parallelo a \hat{z}'

e così il momento delle forze è

$$\vec{M} = \hat{r}' \wedge m \vec{g} = r (\hat{z}' \wedge m \vec{g}) \quad \text{segue ancora che} \quad \vec{M} \cdot \hat{z}' = M_3 = M_z = 0$$

La terza componente del momento della forza è nulla, sia nel lab che rispetto al sistema della ruota.

Il momento angolare L_z nel laboratorio si conserva. Nel sistema della ruota che non è inerziale! si ottiene:

$$23) \quad \dot{L}_3 = \frac{d\vec{L} \cdot \hat{z}'}{dt} = \dot{\vec{L}} \cdot \hat{z}' + \vec{L} \cdot \dot{\hat{z}}' = \vec{M} \cdot \hat{z}' + \vec{L} \cdot (\vec{\omega} \wedge \hat{z}') = (\vec{L} \wedge \vec{\omega}) \cdot \hat{z}'$$

che con le 22 diventa (il prodotto scalare conviene calcolarlo nel sistema della ruota):

$$24) \quad (\vec{L} \wedge \vec{\omega}) \cdot \hat{z}' = L_1 \omega_2 - L_2 \omega_1 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0$$

che fissa la costanza di L_3 , grazie alla simmetria I_1, I_2 ; Vista la definizione di $L_3 = I_3 \omega_3$, L_3 costante implica che la velocità di rotazione della ruota attorno al suo asse z' rimane costante indipendentemente dal movimento attorno al pernio.

Nota che ω_3 la velocità angolare di rotazione attorno all'asse z' .

Già si intravede quello che accade.

Sotto il peso la ruota tende ad abbassarsi e cambia l'angolo θ con l'asse zeta e di conseguenza cambia la componente di L_z su z che inizialmente era nulla!. Il momento angolare L_z allora resta costante solo se viene bilanciato da un nuovo moto di rotazione, detto precessione, della ruota attorno all'asse z .

Sfruttiamo anche la conservazione dell'energia.



$$25) \quad E = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega} + mgd \cos \theta$$

Dove d è la distanza del C.M. dal polo O e θ è l'angolo che il pernio fa con z .
All'inizio per noi è 90 gradi.

Calcolo l'energia cinetica sfruttando le definizioni delle 22

26)

$$T = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} (L_1 \omega_1 + L_2 \omega_2 + L_3 \omega_3) = \frac{1}{2} (I(\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3 \omega_3^2) = \frac{1}{2} I \omega_T^2 + \frac{L_3^2}{2I_3}$$

NOTA ===

*Per pro memoria riporto qui l'espressione della Hamiltoniana generale
Tornerà utile l'anno prossimo quando studieremo meccanica analitica*

$p_\phi = \vec{L} \cdot \hat{Z}$ momenti angolare verticale

$p_\psi = \vec{L} \cdot \hat{e}_3$ momenti angolare sull'asse z principale di inerzia

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 \psi}{I_1} + \frac{\cos^2 \psi}{I_2} \right) \left(\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} p_\psi^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 \psi}{I_1} + \frac{\sin^2 \psi}{I_2} \right) p_\theta^2$$

$$+ \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \left(\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin \theta} \right) p_\theta \sin \psi \cos \psi + V(\phi, \theta, \psi)$$

che nel caso di trottola simmetrica $I_1 = I_2$ si riduce a

$$H = \frac{1}{2I} \left(\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} p_\psi^2 + \frac{1}{2I} p_\theta^2 + V(\phi, \theta, \psi)$$

END NOTA ===

ω_T è la componente perpendicolare al pernio e può essere espressa in funzione di θ e ϕ .

Per questo, vista l'arbitrarietà attorno all'asse z' , immaginiamo che ad un certo istante l'asse x' sia sul piano individuato da zz' e quindi l'asse y' perpendicolare a z e z' . Una rotazione attorno a y' equivale ad una variazione dell'angolo θ e pertanto il termine corrispondente diventa

$$\frac{1}{2} L_2 \omega_2 = \frac{1}{2} L_2 \dot{\theta}_2 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}_2^2$$



La velocità di rotazione del sistema attorno a z è legata a ω_1

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \quad \frac{1}{\gamma} L_1 \omega_1 = \frac{1}{\gamma} I \omega_1 = \frac{1}{\gamma} I \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

da cui

$$27) \quad E - \frac{L_r^2}{\gamma I_r} = \frac{1}{\gamma} I \omega_1^2 + mgd \cos \theta = \frac{1}{\gamma} I (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgd \cos \theta$$

Eliminiamo la dipendenza da ϕ sfruttando la costanza di L_z e L_3

$$28) \quad L_z = L_1 \sin \theta + L_r \cos \theta = I \omega_1 \sin \theta + L_r \cos \theta = I \sin^2 \theta \dot{\phi} + L_r \cos \theta$$
$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L_r \cos \theta}{I \sin^2 \theta}$$

Finalmente sostituisco in 27) e ottengo

$$29) \quad E' = E - \frac{L_r^2}{\gamma I_r} = \frac{1}{\gamma} I \dot{\theta}^2 + \frac{(L_z - L_r \cos \theta)^2}{\gamma I \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta$$

non ci resta che studiare il potenziale efficace, nel nostro caso L_z è nullo, ma non cambia la sostanza del problema:

$$30) \quad U_{eff} = \frac{(L_z - L_r \cos \theta)^2}{\gamma I \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta$$

e capire per ogni valore di E quale è il range angolare, θ_{min} e θ_{max} , in cui oscilla, *nutazioni*, la nostra ruota. Intanto si noti che il potenziale va a infinito per q a zero e a p , pertanto le nutazioni sono sempre confinate, anzi non si può mai arrivare a p . Il moto complessivo della ruota è

1. Ruota con velocità costante attorno al suo asse z' principale di inerzia.
2. Precede attorno all'asse zeta per mantenere il momento angolare lungo z



- Oscilla tra un angolo minimo e massimo descrivendo sulla superficie sferica concentrica con il punto di applicazione del pernio una serpentina piuttosto spigolosa in alto.

Nota:

Questo è un esempio di *rotore tipico*, soggetto ad una forza o momento esterno.

In questa categoria appartiene il moto di una *trottola* e *quello del giroscopio*.

Si possono capire anche i moti della terra, quello di precessione e di nutazione.