Pisa feb 2010
Cap. 22 ver.10

Appunti di Fisica _I
Secondo semestre
Corpi rigidi

Sommario

Corpo rigido e sistemi

Ricordo: Un corpo rigido e' come un sistema esteso, cioe' un sistema con tante particelle, come quello gia' da noi discusso nei capitoli passati. Ma c'e' una differenza, il corpo rigido e' un insieme di punti (infinito) rigidamente connessi gli uni con gli altri in modo da mentenere fisse tutte le loro distanze relative.
Tutte le realazioni trovate per i sistemi estesi sono ancore valide e qui le richiameremo discutendone in dettaglio gli aspetti che riguardano in particolare i corpi rigidi.

Quantita' di moto e Centro di Massa

Per lo studio del moto di un corpo rigido ci immaginiamo il corpo come costituito da N punti materiali sottoposti a forze esterne e alle forze di interazione tra i punti stessi. Seguendo lo stesso ragionamento gia' fatto per i sistemi estesi a molti particelle si puo' calcolare il Centro di Massa (detto poi C.M.) e ovviamente si trova lo stesso identico risultato dei corpi a molte particelle.
Se si tiene conto del fatto che il corpo rigido ha una densita' di punti materiali (atomi) cosi' elevata che potremmo dimenticarci di parlare di punti e seguire una rappresentazione integrale matematica piu' elegante. Potremmo pensare di

suddividere il corpo rigido in tanti volumi elementari infinitesimi di massa dm =ρdV dove ρ e' la densita' della materia espressa in kg/m^3 e dV e' il volumetto elementare. Ecco la definizione di C.M.:

2)
$$\vec{r}_B = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\,\rho\, dV \qquad con \;\; ovviamente \qquad M = \int_V \rho dV$$
$$o\ per\ componenti$$
$$x_B = \frac{1}{M}\int_V x\,\rho\, dV \quad y_B = \frac{1}{M}\int_V y\,\rho\, dV \quad z_B = \frac{1}{M}\int_V z\,\rho\, dV$$

Gli integrali sono tripli in dxdydz oppure in $r^2 d\phi d\cos\theta dr$.

Fra l'altro la densita' puo' differire da punto a punto; nel caso sia costante la 2) si semplifica in

3)
$$\vec{r}_B = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\, dV$$

Analizza ora queste definizioni e scoprirai che il C.M. di un solido che abbia una forma simmetrica regolare cade nel bel mezzo del solido stesso, o meglio, nel suo centro di simmetria.

Corpi con forme simmetriche

Per dimostrare quanto detto, immaginati di calcolare il C.M. in un sistema di riferimento che abbia la propria origine nel centro di simmetria del corpo.

La parola simmetria sta ad indicare che la distribuzione della massa e' tale che rispetto a quel particolare punto, c'e' tanta massa a destra come a sinistra, c'e' tanta massa in alto quanto in basso ed infine, c'e' tanta massa dietro quanto avanti. Insomma scelto un punto qualsiasi del corpo esiste un'altro punto che sta sulla retta congiungente il primo punto con il centro di simmetria, ha la stessa distanza del primo , ma sulla retta e' dalla parte opposta rispetto al centro.

In queste condizione si scopre che gli integrali 2) per le coordinate del C.M., cosi' come l'integrale 3) si annullano identicamente. Quindi le coordinate del C.M. rispetto al centro di simmetria corrispondono proprio con il centro stesso; cvd.

Le forze

Ora la prima equazione cardinale dei sistemi afferma che *la derivata della quantita' di moto totale del corpo e' pari alla risultante delle sole forze esterne*.

E' vero anche per un corpo rigido poiche' le forze interne di interazione tra le infinite coppie di punti, relativamente immobili o no, si annullano a vicenda.

La risultate di tutte le forze esterne va *pensata applicata al centro di massa del sistema*.

Ecco che un sassetto, quando lo lanci nello spazio, descrive la stessa traiettoria di un punto materiale come se tutta la sua massa fosse concentrata nel C.M.

Il Baricentro

Spesso il centro di massa e' indicato come *baricentro* ! Ebbene immaginate un corpo solido immerso nel nostro campo gravitazionale. Possiamo calcolare un punto in cui potremmo immaginare applicata la forza peso, un punto definito come media pesata, proprio con la forza peso, di tutti i punti del nostro solido.

$$\vec{R}_p = \frac{1}{P_{tot}} \int \vec{r}\, dP \quad con \quad dP = g\, dm \quad e \quad P_{tot} = \int g\, dm = Mg \quad segue$$

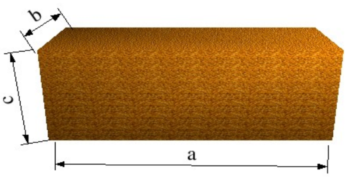
$$\vec{R}_p = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm = \vec{R}_{CM}$$

Ovvero il centro della forza peso corrisponde con il centro massa! e perche' la forza peso e' proporzionale alla massa!.

Da qui il nome che spesso viene usato di *baricentro* (centro del peso) al posto di centro di massa. Nota che la gravita' non e' veramente costante su larga scala e pertanto quanto affermato e' una approssimazione tanto piu' valida quanto piu' il solido e' di piccole dimensioni!

Calcolo del C.M.

Partendo dalle 2) trovi le coordinate del C.M. di un qualsiasi corpo. Nel caso di corpi particolarmente simmetrici e densita' r costante, ecco i risultati.



Un mattone di dimensioni a,b,c : Prendiamo il mattone e immaginiamo di posarlo in terra in modo che uno spigolo corrisponda con l'origine del nostro sistema casalingo e i tre spigoli siano orientati come gli assi. Gli integrali di 2) danno $x_b = a/2$, $y_b = b/2$, $z_b = c/2$; cioe' *il centro di simmetria del mattone*. Per convincerti fai il primo integrale

$$x_B = \frac{1}{M} \int_V x\, dm = \frac{1}{\rho V} \int_V x\, \rho\, dV = \frac{1}{V} \int_V x\, dV = \frac{1}{V} \iiint x\, dx dy dz$$

$$\frac{1}{V} \iiint x\, dx dy dz = \frac{1}{V} \int_0^a x\, dx \int_0^b dy \int_0^c dz = \frac{1}{V} \frac{a^2}{2} b\, c = \frac{a}{2}$$

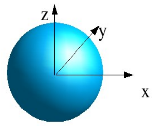
c.v.d.

Quindi adesso sappiamo dove sta il C.M. di un qualsiasi solido a forma parallelepipeda.

Una sfera di raggio R: La pensi posizionata in modo che il suo centro corrisponda con l'origine del tuo sistema casalingo. Partiamo dalla 3), componente x, e usiamo per semplicita' le coordinate sferiche:

$$x_B = \frac{1}{V}\int_V x\, dV = \frac{1}{V}\iiint r\cos\phi\sin\theta \;\; r^2\, dr\, d\phi\, d\cos\theta$$

$$x_B = \frac{1}{V}\int_0^R r^3\, dr \int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi \int_{-1}^{1} \sin\theta\, d\cos\theta = 0$$



che vale zero, visto che l' integrale in ϕ e' nullo. E cosi' per le altre coordinate. Quindi il C.M. corrisponde con il centro della sfera.

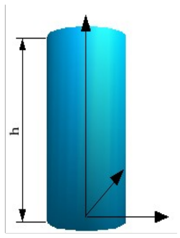
Un cilindro di raggio R e altezza h: Lo pensi con la base appoggiata sul piano xy e l'asse lungo z. Per il calcolo si usano le coordinate cilindriche:

$$x_B = \frac{1}{V}\int_V x\, dV = \frac{1}{V}\iiint r\cos\phi \;\; r\, dr\, d\phi\, dz = \frac{1}{V}\int_0^R r^2\, dr \int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi \int_0^h dz = 0$$

nullo per l'integrale in cos (ϕ), come e' nullo Il calcolo anche per y_b. Invece per z_b

$$z_B = \frac{1}{V}\int_V z\, dV = \frac{1}{V}\iiint r\, dr\, d\phi\, dz = \frac{1}{V}\int_0^R r\, dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h z\, dz$$

$$z_B = \frac{2\pi}{V}\frac{R^2}{2}\frac{h^2}{2} = \frac{h}{2}$$



che, guarda caso, e' il centro di simmetria del cilindro.

Se il cilindro non fosse stato pieno, ma con un buco sempre cilindrico interno ben centrato avremmo trovato esattamente lo stesso risultato! Sarebbe cambiato solo 'l'integrale tra 0 e R in R_{min} e $R_{max;}$ anche per una sfera cava avremmo avuto lo stesso risultato!

Da pensare i casi in cui il cilindretto interno non e' centrato o la sfera cava ha una cavita' sferica non centrata... che accade?

Il sistema baricentrale

Nel seguito parleremo di *sistema baricentrale* o *riferimento del centro di massa* , come riferimento che ha *l'origine nel C.M. del corpo rigido ed ha gli assi orientati* *come gli assi del laboratorio.* Questo sistema non coincide, in genere, con il sistema interno del corpo rigido A parte le origini dei due sistemi che possono anche coincidere, gli assi di quello solidale con il corpo cambiano di direzione con le rotazioni del corpo rigido stesso.

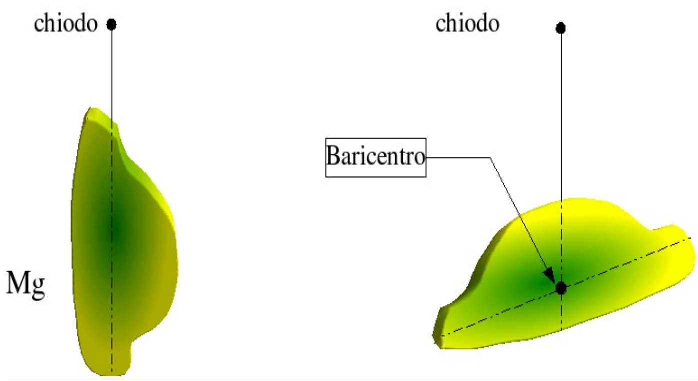
Nota sul C.M.

Dato un corpo senza una precisa simmetria, come si puo' trovare il C.M.?
Si gioca sul fatto che baricentro e C.M. coincidono!

La procedura e':

- Appendi il corpo ad un filo ed attendi che il tutto sia fermo.
- Segni sul corpo la retta che continua idelmente il cammino del filo al suo interno.
- Cambi posizione, di circa 90 gradi, ed individui un'altra retta.
- Queste due rette individuano un piano baricentrale. Il C.M. coincide con l'intersezione delle due rette.
- Se cambi ancora il punto di sospensione, magari scelto a circa 90 rispetto al piano di prima, hai un'altra retta che passa ancora per il C.M. e ti aiuta a definire meglio la posizione del C.M..

Perche' funziona? Ricordati che la forza peso, costante su tutto il corpo, corrisponde ad una forza risultante applicata nel baricentro. Quindi tu stai appendendo, di fatto, una pallina infinitesima di peso M e la retta individuata dal filo deve passare per la pallina!.



Il momento angolare

Intanto ricordo che il *momento angolare* e' un modo piu' conciso per dire *momento della quantita' di moto*.

Ricordo che il momento angolare e' definito come $L = \vec{r} \wedge m\vec{v}$, il *prodotto vettoriale* della quantita' di moto per il raggio vettore che unisce il polo di riferimento con il punto materiale di massa m. Quello che conta e' la distanza della retta su cui avviene il moto dal polo (braccio).

La seconda equazione cardinale recita, nel caso che il polo Ω di riferimento sia fisso o si muova parallelamente al C.M.:

La derivata del momento angolare totale di un sistema rispetto ad un polo Ω e' uguale al momento delle sole forze esterne rispetto allo stesso polo.

In formula (vedi anche cap. 15, eq. 9a) :

4a) $$\frac{d\overrightarrow{L_\Omega}}{dt} = \overrightarrow{M_\Omega^e} - \overrightarrow{v_\Omega} \times \vec{Q}$$

che coincide con quanto sopra detto se $\mathbf{v}_\Omega$ e' nullo o parallelo a **Q** o **Ω** coincide con il C.M.

Rivediamo il calcolo del momento angolare del corpo rispetto ad un punto O, per esempio rispetto all'origine del sistema del laboratorio. Nel conto partiamo dalla definizione di velocita' indicata in 21.8 dove si evidenzia che la velocita' di un punto del corpo si puo' esprimere come somma della velocita' del C.M. (di trascinamento) piu' quella rispetto al C.M. stesso .

Naturalmente usiamo una rappresentazione integrale. Il contributo elementare al momento angolare dato dall'elemento di massa i-mo dm nel punto individuato dal vettore
$\mathbf{R} = \mathbf{R}_b + \mathbf{r}$ dove $\mathbf{R}_b$ è la coordinata del C.M. e il vettore **r** e' relativo al centro di massa, i cui assi sono congrui con quelli del laboratorio) e':

4b) $$d\vec{L} = \vec{R} \wedge dm\vec{V} = (\overrightarrow{R_b} + \vec{r}) \wedge (\overrightarrow{V_b} + \vec{v})\,\rho\, dV$$

dove $\mathbf{V}_b$ è la velocità del C.M. E v e' la velocita' dell'elemento dm nel sistema del C.M. Si ha, in forma discreta:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{R}_b + \vec{r}) \times m_i(\vec{V} + \vec{v}) = \vec{R} \times \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V} + \sum_{i=1}^{N} (\vec{r} \times m_i \vec{v}) \qquad 5)$$

da cui banalmente , in forma integrale (l'indice i sparisce), per le sole parti diverse da zero:

6) $$\vec{L}=\vec{R}_b\wedge\vec{Q}+\int_M \vec{r}\wedge\vec{v}\,dm=\vec{L}_b+\vec{L}_r$$

il primo termine della 5) e' il momento della **Q** rispetto al lab come se tutta la massa fosse concentrata in CM; il secondo e' il momento angolare del corpo rispetto al sistema di riferimento baricentrale.

Ricordando che il legame tra la velocita' $\mathbf{v}_{O'}$ e la velocita' ω di rotazione del corpo rispetto al suo C.M. e': $\vec{v}=\vec{\omega}\wedge\vec{r}$

Val la pena di notare che *l'atto di moto di un corpo rigido nel riferimento del centro di massa e' sempre rotatorio, poiche' c'e' sempre almeno un punto fermo, il C.M.*.

Segue:

7) $$\vec{L}_r=\int_M \vec{r}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,dm$$

In conclusione:

Il momento angolare totale rispetto ad O e' la somma del momento angolare calcolato sempre rispetto ad O come se tutta la massa fosse concentrata nel C.M. piu' il momento angolare di rotazione rispetto al C.M. (momento angolare interno).

La 6) ci dice come varia il momento angolare al variare del polo O di riferimento.

Nel caso in cui la *velocita' del C.M. sia nulla o* ***Q****=0, il momento angolare e' indipendente dal polo e coincide con il momento angolare baricentrale.*

Il momento di inerzia

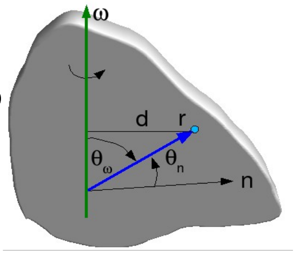
La 7) indica come calcolare il momento angolare baricentrale ed e' sicuramente un po' complicata. Intanto riscriviamola sviluppando il doppio prodotto vettoriale:

$$\vec{L}_r=\int_M \vec{r}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,dm=\int_M (r^2\vec{\omega}-\vec{r}\cdot\vec{\omega}\,\vec{r})\,dm \quad 8)$$

Se si analizza il termine in parentesi si scopre

$(r^2\vec{\omega}-\vec{r}\cdot\vec{\omega}\,\vec{r})=r^2\omega(\hat{\omega}-\cos(\theta)\hat{r})$ segue $\vec{L}_r=\int_M r^2\omega(\hat{\omega}-\cos(\theta)\hat{r})\,dm$

dove θ è l'angolo tra omega e **r .**



8a)

Che significato ha?. Vediamo la componente del momento angolare parallela a ω proiettando L su ω.

$$L_\omega = \hat{\omega}\cdot\int_M r^2\,\omega\,(\hat{\omega}-\cos(\theta)\,\hat{r})\,dm = \int_M r^2\,\omega\sin(\theta)^2\,dm$$

$$L_\omega = \int_M d^2\,dm$$

Notare che se il corpo rigido si riducesse ad un punto di massa m si avrebbe semplicemente

$$L_\omega = (\vec{r}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,m)\,\hat{\omega} = m\,b^2\,\omega$$

Ovvero il momento della quantità di moto proiettato sull'asse ω

dove d e' la distanza dell'elemento dm dall'asse di rotazione. I_w si chiama *momento di inerzia assiale* del corpo rigido rispetto all'asse omega.

Ovvero il momento della quantità di moto proiettato sull'asse ω.
Se immaginiamo omega orientata come l'asse z, possiamo calcolare anche le componenti perpendicolari ad omega L_x e L_y, od una componente comunque perpendicolarte ad omega $L_\perp$
Prendi un versore perpendicolare a omega, per esempio **n** e inseriscilo nella 8) come prima.

8b) $$L_n = \vec{L}_r\cdot\hat{n} = -\omega\int_M r^2\cos\theta_\omega\cos\theta_n\,dm$$

che in genere e' diversa da zero a meno che il corpo non abbia una particolare simmetria che annulla l'integrale 8b).
Conclusione: *la direzione del momento della quantita' di moto interno non coincide in genere con la direzione della velocita' angolare.*

Tensore di inerzia

Ma vediamo meglio sviluppando la 8) sostituento il raggio e la omega con le sue componenti

r' = r ≡(x,y,z), e **ω** ≡ (ω_x,ω_y,ω_z)

Scopriremmo la seguente forma:

$$\vec{L}_r = \int_V \begin{vmatrix} r^2 - x^2 & -xy & -xz \\ -yx & r^2 - y^2 & -yz \\ -zx & -zy & r^2 - z^2 \end{vmatrix} dm \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_r = I\,\vec{\omega}$$

9) $$con \quad I_{ij} = \int_M (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dm$$

$$con \quad \delta_{ij} = 1 \ \textit{se i=j oppure 0 se i diversa da j}$$

un po' complicata!. "I" e' una matrice che chiameremo il *tensore di inerzia* del corpo rigido. Gli elementi del tensore d'inerzia corrispondono alle medie non normalizzate (pesate con la massa) dei coefficienti della matrice che appare nella 9).

Notare che la rappresentazione o gli elementi del tensore dipendono dalla orientazione del sistema di riferimento rispetto al corpo rigido, mentre sono costanti nel caso ci si riferisca ad un sistema solidale con il corpo rigido stesso.

Certamente non vogliamo ora addentrarci in conti difficili anche se sara' bene fare in futuro qualche esempio .

Un po' di note

Intanto la seconda equazione cardinale, nella accezione piu' semplice cioe' la 4a) senza l'ultimo termine, ci ricorda che la derivata del momento angolare totale e' uguale al momento delle forze esterne.

10) $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_b}{dt} + \frac{d\vec{L}_r}{dt} = \vec{M}_e$$

Se la risultante delle forze esterne e' nulla, mi aspetto che la quantita' di moto ed il momento della quantita' di moto siano costanti.

Tuttavia il momento delle forze potrebbe essere ancora non nullo. Pensate ad un sistema semplice (un dipolo) costituito da due cariche elettriche della stessa intensita', ma di segno contrario, posizionate agli estremi di una asticella di massa M e di lunghezza fissa d ed immersa in un campo elettrico costante. La forza totale e' nulla, ma il momento angolare delle forze rispetto al C.M. e' in genere ben diverso da zero! Allora l'equazione si riduce

10a) $$\vec{M}_e = \frac{d\vec{L}_r}{dt} = \frac{d(I\,\vec{\omega})}{dt}$$

dove la *parentesi tonda e' importante* poiche' in genere **I** varia nel tempo con il variare dell'orientazione del corpo nel sistema di riferimento baricentrale!

Diagonalizzazione

L'ultima relazione delle 9) tra il momento angolare baricentrale e l'asse di rotazione non e' una semplice proporzionalita'. Ma il vettore omega e' trasformato dalla matrice **I** nel vettore momento e poiche' la matrice mescola le componenti di ω con coefficienti diversi (come se fosse una matrice di rotazione), *il vettore momento ed il vettore omega non rimangono in genere paralleli* (come del resto abbiamo dimostrato)

Il tensore di inerzia e' funzione solo della forma e della distribuzione della massa nel corpo e *caratterizza completamente il corpo rigido rispetto al moto di rotazione nella seconda equazione cardinale, cosi' come la massa lo carratterizza rispetto al moto di pura traslazione nella prima equazione cardinale.* Ma i valori dei coefficienti dipendono dal sistema interno scelto, voglio dire, che sistemi interni ruotati l'uno rispetto all'altro sono altrettanto buoni per descrivere il tensore di inerzia, ma danno coefficienti diversi, anche se ovviamente non indipendenti.

C'e' un sistema interno particolare, ben orientato in cui il tensore di inerzia si presenta con solo tre valori positivi sulla diagonale principale. Quel sistema e' orientato in modo da coincidere con i tre assi principali di simmetria del nostro corpo rigido. C'e' una procedura matematica (diagonalizzazione) che ci permette di trovare, indipendentemente dal sistema scelto, gli assi di simmetria o *assi principali di inerzia*; noi ora non faremo il conto, ma ci crediamo!.

Il valore dei tre coefficienti della diagonale di **I** calcolati nel sistema di riferimento orientato secondo gli *assi principale di inerzia* sono i *momenti principali di inerzia* relativi ai tre assi x, y , z del sistema “ben orientato”. In effetti possono essere anche piu' di tre nel caso di corpi particolarmente simmetrici. Una sfera ne ha infiniti, un cilindro uno assiale e infiniti trasversale.....

Possiamo immaginare i tre coefficienti di inerzia come gli inversi dei quadrati dei semiassi di un *elissoide di inerzia* centrato nel C.M. e orientato proprio come i tre assi del sistema di riferimento (una bella palla da baseball...magari un po' schiacciata!).

$$I_{xx}X^2+I_{yy}Y^2+I_{zz}Z^2=1$$

Un asse che esce dal CM attraversa la superficie ad una certa distanza dal centro, il quadrato di quella distanza è inversamente legata al momento di inerzia rispetto all'asse stesso.

Ancora su L e ω

Analizzando ancora la 9) il caso in cui il tensore di inerzia e' diagonale (cioe' riferito ad un sistema interno ben orientato secondo i principali assi di inerzia) ed il vettore vettore **ω** e' parallelo ad uno degli assi principali di rotazione:

11) $$\vec{L}_r = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_z \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_z \end{pmatrix}$$

Il tensore di inerzia, che e' diagonale, trasforma il vettore **ω** parallelo a z in un vettore parallelo allo stesso asse come si puo' facilmente provare.

Quindi tutte le volte che il corpo ruota attorno ad un suo asse di simmetria abbiamo la semplice relazione scalare $L_n = I_n w$ e dove I_n assume uno dei tre valori dei *momenti di inerzia assiale* che resta costante durante la rotazione. Per esempio per l'asse z e per il calcolo del momento assiale , ricordando anche la 9) e la 8a) segue:

$$I_z = \int_M I_{zz} dm = \int_M (r^2 - z^2) dm = \int_M d^2 dm$$

Mentre l'equazione cardinale si riduce a

12) $$M_z = \frac{d I_z \omega_z}{dt} = I_z \frac{d\omega_z}{dt} \quad visto\ che\ I_z\ e'\ costan$$

Nota:

Nel caso di una sfera, il tensore di inerzia ha i tre numeri sulla diagonale identici, e pertanto qualsiasi sia l'asse di rotazione il momento angolare e' parallelo sempre all'asse di rotazione.

I momenti assiali

Qui per studiare i principali moti dei corpi rigidi ci conviene calcolare, in alcuni casi tipici i momenti di inerzia assiali I_z.

Ecco il calcolo del momento assiale per

Una sfera:

La sua simmetria e' sferica e ogni asse passante per il centro e' equivalente!
Calcolo il momento di inerzia rispetto ad un ipotetico asse z; naturalmente in coordinate sferiche.

14)
$$I_z=\int_V (r^2-z^2)\rho\, dV=\int_V r^2 \sin\theta^2 \rho\, r^2\, dr\, d\phi\, dcos\theta$$
$$I_z=2\pi\int_0^R r^4 \rho\, dr\int_{-1}^{1}(1-\cos\theta^2)d\cos\theta=\frac{2}{5}MR^2$$

dove la masse M = 4/3 π r r^3 . Il tensore inerziale in questo semplice caso e' sempre diagonale e i termini sulla diagonale sono identici.
Quanto vale il momento di inerzia rispetto ad un asse di una sfera cava (guscio di spessore sottile)?

Cilindro: R,h

Calcoliamo il momento di inerzia assiale, parallelo all'asse di simmetria del cilindro in coordinate cilindriche ovviamente.
Nota, r e' la distanza di un punto del corpo dall'asse del cilindro.

15)
$$I_z=\int_V r^2 \rho\, dV=\int_V r^2 \rho\, r\, dr\, d\phi\, dz$$
$$I_z=2\pi\rho\iint r^3 dr dz=\frac{1}{2}MR^2$$

Tutti gli altri assi perpendicolari all'asse del cilindro e passanti per il centro sono assi di simmetria. Provare a calcolare il momento di inerzia assiale.

Un mattone : a,b,c

Qui gli assi di simmetria sono evidentemente tre. Sono perpendicolari alle facce e passano per il centro del mattone. Il centro del mattone coincide con il centro del sistema di riferimento.
Calcoliamo il momento di inerzia per l'asse parallelo a z. Lo spessore del mattone in z e' c.

$$I_z=\int_V (x^2+y^2)\rho\, dV=\rho\int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx\int_{-b/2}^{b/2} dy\int_{-c/2}^{c/2} dz+\rho\int_{-a/2}^{a/2}\rho\, dx\int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy\int_{-c/2}^{c/2} dz \quad 1$$

ed integrando

16) $$I_z = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$

e simili per I_x e I_y.

Se un asta e' sottile e lunga d , I_z e' praticamente nulla, ma I_x o I_y rispetto ad un asse perpendicolare all'asta stessa vale $I_x = 1/12\ Md^2$

E si possono calcolare tanti altri casi.