Pisa Feb 2011
Cap.21 rev 11

Appunti di Fisica _I
Secondo semestre

Corpi rigidi

Sommario

Il corpo rigido

Abbiamo discusso i corpi a più particelle in interazione tra loro, ma relativamente libere di muoversi in qualsiasi direzione. Un corpo rigido è costituito invece da un numero infinito di particelle elementari. Gli atomi o le molecole fortemente interagenti tra loro, così tanto da costituire un sistema di dimensioni finite, in cui tutte le particelle occupano posti ben determinati e sono praticamente ferme le une rispetto alle altre. Creano un sistema solido cristallino in cui gli atomi sono disposti in modo da formare strutture poliedriche ricorrenti o se non cristalline, strutture amorfe in cui la disposizione delle particelle non rispetta nessun disegno preordinato benché siano distribuite uniformemente nel volume del solido.
In tutti i casi non siamo di fronte ad un punto materiale, ma in presenza di un solido rigido di dimensioni anche immense.
Facciamo un modello che tiene conto delle caratteristiche macroscopiche del corpo rigido senza entrare per il momento nel merito della struttura microscopica, che sarà studiata nei prossimi anni.

Un corpo rigido è tale che le distanze relative di tutti i punti interni sono fisse.

Quindi vediamo quali sono i movimenti possibili del corpo. Prendi un libro appoggiato su di un tavolo e spostalo in una qualsiasi direzione facendo attenzione a non farlo ruotare; tutti i punti interni del libro descrivono lo stesso segmento in direzione, senso e lunghezza.

Hai semplicemente traslato il libro da un punto all'altro. In effetti puoi muovere il libro anche lungo una traiettoria curva, sempre senza ruotare la sua orientazione, per esempio, fai descrivere al centro del libro una circonferenza; alla fine il libro ritorna nel posizione iniziale. Se ci pensi bene conoscendo in ogni istante la posizione del centro , conosci anche la posizione di tutti gli altri punti del libro.
Ma non basta! Nel moto potresti anche ruotare l'orientazione del libro, pur mantenendo il suo centro sulla traiettoria scelta inizialmente. Alla fine per capire come è orientato il libro hai bisogno di sapere intorno a quale asse l'hai ruotato e di quanto. *In genere è un moto rototraslatorio*.

Gradi di liberta'

Intanto dobbiamo stabilire come individuare la posizione di un solido ed in particolare la posizione di ciascun suo punto rispetto ad un sistema di riferimento **O**. Un punto **P** del solido (per esempio un punto particolare: uno spigolo, o il suo centro o il suo centro di massa) può essere riferito al sistema di riferimento con le solite tre coordinate. Un secondo punto **P'** , arbitrario ma interno al solido, individua insieme a **P** un asse solidale con il solido, un terzo **P"** ci permette di immaginare un piano contenente l'asse di prima e questo ultimo punto. Infiniti punti del corpo coincidono con i punti del piano individuato da (**P,P',P"**) e vista la definizione di corpo rigido, tutti gli altri punti del corpo, anche esterni al piano, sono individuati perfettamente rispetto al sistema di riferimento **O**.
Quindi basta sapere la posizione di tre punti del solido per conoscere tutto!
Ora i tre punti sono individuati da 9 parametri (le coordinate), ma dato che le distanze tra i tre punti sono fissate dalla rigidità del sistema con tre *equazioni vincolari*, sono sufficienti 6 parametri per stabilire la posizione assoluta del corpo e di tutti i suoi punti.
In effetti bastano per esempio le 3 coordinate di un punto del corpo **P** e 2 altri parametri per individuare la direzione dell'asse orientato (versore) passante per **P** perpendicolare al piano di prima. Ricorda un versore è individuato dai tre coseni direttori, ma c'è una condizione geometrica banale (normalizzazione) che abbassa a due i parametri necessari. Poi occorre 1 angolo di rotazione attorno all'asse per fissare la posizione definitiva del solido rispetto al lab.

Coclusione : l*a posizione di un corpo rigido è individuato da sei parametri o, come diremo, un corpo rigido ha <u>sei gradi di libertà</u>.*

Sistema di riferimento

Ora cerchiamo di mettere in formula quanto abbiamo capito. Per questo immaginiamo un sistema di riferimento solidale con il corpo la cui origine coincide con un punto O' del corpo, gli assi z' ed x' coincidono con due assi perpendicolari tra loro del corpo, l'asse y' è perpendicolare al piano z'x' ed è orientato in modo da formare con gli altri una terna destrorsa. (x'y'z') è il sistema del corpo rigido;

bastano tre coordinate per individuare la posizione **P** di una particella del solido rispetto a questo sistema o che è lo stesso, rispetto al corpo rigido . Il solido può essere orientato arbitrariamente rispetto al sistema del laboratorio, ma un punto **P** del copro è individuato internamente sempre dalle stesse tre coordinate rispetto a O'**,** **PO'≡**(x',y',z').
La posizione assoluta nello spazio di un punto del solido **P** sarà invece definita dal vettore **PO** che puoi scrivere come somma del vettore **O'O** che individua la posizione dell'origine **O'** del sistema di riferimento del solido rispetto al sistema **O** del laboratorio, più il vettore **PO'** *come visto dal lab*.

1) $$\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{PO'}$$

Se i due sistemi, quello del lab e quello del corpo rigido sono paralleli, le coordinate del segmento **PO' ≡**(x',y',z') corrispondono alle componenti del vettore **PO'** nel lab e si ottiene la semplice relazione

1a) $$\begin{aligned} x&=x_{o'o}+x' \\ y&=y_{o'o}+y' \\ z&=z_{o'o}+z' \end{aligned}$$

ma in genere i due sistemi sono ruotati l'uno rispetto all'altro in modo del tutto arbitrario.

Orientamento arbitrario

Per un orientamento arbitrario ci serviremo dei versori degli assi del sistema **O'** , indicandoli con **I,J,K**[1]**,** visti nel sistema di riferimento del lab. Il vettore **PO'** (nel lab) allora può essere costruito come somma di tre vettori giacenti sugli assi di **O'** di intensità x',y' e z', le coordinate del vettore **PO'** nel sistema O'. In modo compatto si ottiene per **PO'** .

2) $$\vec{PO}'=\hat{i}\,x'+\hat{j}\,y'+\hat{k}\,z'$$

Quindi una volta noti i versori del sistema **O'** rispetto al lab e le coordinate di **P** nel sistema del solido, la 2) ci rende le coordinate del segmento **PO'** rispetto al sistema del laboratorio.
Finalmente il vettore del punto **P** visto nel sistema del lab è:

2a) $$\vec{PO}=\vec{O}'O+\vec{PO}'=\vec{O}'O+\hat{i}\,x'+\hat{j}\,y'+\hat{k}\,z'$$

[1] I versori sono funzione degli angoli di Eulero come vedremo più avanti.

che si riduce alla 1) se i versori sono paralleli agli assi del lab. In caso contrario la vita è un pò più complicata, ma poi non così tanto.
Ogni versore ha tre componenti: le proiezioni del versore sugli assi del laboratorio, che corrispondono ai coseni degli angoli che il versore fa con gli assi del lab (e per questo si chiamano i *coseni direttori*).

Nota :
il modulo dei versori è unitario, il prodotto scalare di due versori è nullo ed il prodotto vettoriale vale

ix**j** =**k** , **j**x**k** =**i** , **k**x**i** =**j**

Svillupando la 2a) in funzione delle componenti dei versori, c_{ix} .... (dove "c" sta per il valore del coseno dell'angolo inviduato dal versore " i " e l'asse " x" del laboratorio) si ottiene sviluppando la (2a) :

3)
$$\begin{aligned}
&\hat{i} \equiv (c_{ix}, c_{iy}, c_{iz})\, e\ simili \\
&x = x_{0'0} + c_{ix} x' + c_{jx} y' + c_{kx} z' \\
&y = y_{0'0} + c_{iy} x' + c_{jy} y' + c_{kz} z' \\
&z = z_{0'0} + c_{iz} x' + c_{jz} y' + c_{kz} z'
\end{aligned}$$

Così noto l'orientamento del solido rispetto al lab (ovvero noti i coefficienti "c") , la 2a) o la 3) ci offrono un modo semplice per dare le coordinate assolute di un qualsiasi punto del solido, una volta note, ovviamente, le coordinate interne.

Rotazioni

C'è un'altro modo per scrivere compattamente la 3); si vede che i coefficienti c_{ij} formano una matrice di rango 3 che chiameremo la matrice di rotazione del sistema del solido rispetto al laboratorio.

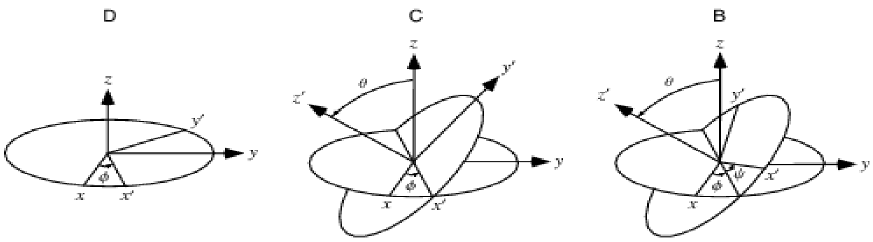
4)
$$\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{O'O} + R(\phi, \theta, \psi)\overrightarrow{PO'}$$

dove **R** è la matrice di rotazione in funzione degli angoli di Eulero (che vedremo subito dopo), che vista la 3) si scriverà (nota: PO' è il vettore nel sistema del corpo):

4a)
$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{vmatrix} c_{ix} & c_{jx} & c_{kx} \\ c_{iy} & c_{jy} & c_{ky} \\ c_{iz} & c_{jz} & c_{kz} \end{vmatrix}$$

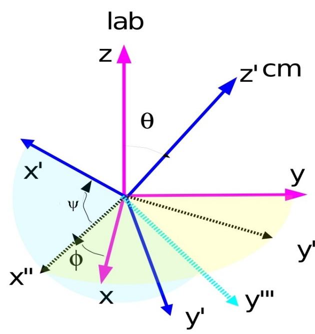
i c_{ix} non sono indipendenti; infatti le somme quadrate delle terne dei numeri per riga o colonna valgono “uno”, cioè sei equazioni vincolari che lasciano indipendenti solo tre numeri!
Nel paragrafo seguente vediamo come individuare meglio i paramentri indipendenti...

Angoli di Eulero



Ora non vogliamo addentrarci troppo nella matematica delle ruotazioni, ma ....come facciamo per orientare un sistema di riferimento del lab con quello di un corpo solido?
Nota il sistema del lab è (x,y,z) quello del corpo (x',y',z') nella posizione finale. Gli altri assi che appariranno nella discussione x'' e y'' e y''' sono assi di riferimento per operazioni “intermedie”; dunque:

Prima Operazione.



Ruotiamo attorno a z di ϕ in modo da far coincidere il versore dell'asse x con la perpendicolare al piano individuato dagli assi zz' che chiameremo (asse nodale) x'', (durante questa operazione il versore di z non cambia, y ruota in y'' perpendicolare z e giacente sul piano zz') Praticamente è come lavorare solo sul piano xy, le due componenti x e y del vettore cambiano, mentre la componente z resta fissa. In questo caso è facile individuare i coefficienti di rotazione per passare da un vettore riferito al sistema del lab e quello solidale con il corpo.
Si noti che se il corpo è stato ruotato di ϕ,

4b)
$$R_z(\phi)=\begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

che è la matrice che applicata ad un vettore lo trasforma in un vettore riferito al corpo ruotato di ϕ.
Ora in (x'',y'',z) ruotiamo attorno al nuovo x'' di un angolo θ fino a far combaciare il versore di z con quello z' del sistema solidale con il corpo, (qui x'' resta fisso, mentre y'' ruota di θ sul piano zz' verso una posizione y''' perpendicolare a z').

4c) $$R_{x''}(\theta)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}$$

Siamo adesso su un sistema di riferimento intermedio che ha l'asse z giusto lungo z', e gli assi x'' e y''' giacenti sul piano individuato da x'e y' del corpo, ma non ancora, a meno di una rotazione , coincidenti con questi! Quindi.... ruotiamo di ψ attorno al nuovo asse z' fino a portare l'asse x'' sull'asse x' del solido.

4d) $$R_{z'}(\psi)=\begin{vmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Ora i due sistemi coincidono! Bene! Le tre matrici si possono compattare

4e) $$R(\phi,\theta,\psi)=\begin{vmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Questo è legato alla matrice dei coefficienti c_{ix} su scritta! E con un pò di buona volontà potremmo esprimere, vedi la 4b) tutti i coefficienti proprio in funzione dei tre angoli di rotazione , purché si faccia attenzione alla successione con cui si fanno le rotazioni, infatti per passare da un vettore espresso in coordinate solidali con il corpo rigido a quelle del lab, occorre ruotare in senso inverso alla rotazione espressa in 4e) (vedi il cap. prossimo).
Nota: la matrice che genera la rotazione inversa la si ottiene dalla 4e) cambiano il segno agli angoli e operando in senso inverso

4d) $$R(-\psi,-\theta,-\phi)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

La matrice che si ottiene ha nove numeri c_{ix} espressi tutti in funzione dei tre angoli, per l'appunto (ϕ,θ,ψ detti anche *angoli di Eulero*).

Per saperne di piu':
http://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html
http://casgm3.anorg.chemie.uni-tuebingen.de/klaus/nmr/conventions/euler/euler.html

Referenze

1. M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley: New York 1957.
2. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd. ed.; Addison-Wesley, Reading, MA, 1980.
3. W. P. Power, R. E. Wasylishen, S. Mooibroek, B. A. Pettitt, W. Danchura, *J. Phys. Chem.* **1990**, *94*, 591.

Adesso un pò di attenzione!

Una matrice di rotazione genera una rotazione *attiva*, nel senso che le nuove componenti del vettore corrispondo a quelle di un vettore ottenuto dal primo ruotandolo fisicamente dell'angolo voluto, ma si otterrebbero gli stessi valori delle componenti se invece di ruotare il vettore si immaginasse di ruotare il sistema di riferimento indietro dello stesso angolo, rotazione *passiva*!
E... devo dire che in genere un vettore indica una grandezza nello spazio che certamente non dipende dal sistema di riferimento e quindi è piuttosto la nostra descrizione che dipende dal sistema di riferimento o meglio dalla sua orientazione....
Se abbiamo un vettore noto nel corpo rigido di orientazione (ϕ,θ,ψ) il lab vede il vettore di prima come ruotato esattamente di ($-\psi,-\theta,-\phi$) e pertanto per riferire il vettore del corpo rigido al sistema del lab applicheremo la rotazione $R(-\psi,-\theta,-\phi)$;

Cinematica

Un sasso, un libro (ben chiuso!), un mondo, viaggiano nello spazio con le leggi imposte dalla natura. Supponiamo di conoscere il moto del baricentro di uno di questi corpi e vediamo in alcuni casi come va il moto di un punto P' arbitrario del corpo.
Si parte sempre dalla equazione 2) .

Moto traslatorio

Il corpo si muove mantenendo inalterato il suo orientamento. Ogni punto del corpo segue una traiettoria parallela a tutte le altre e pertanto si ha semplicemente

5) $$\overrightarrow{PO}(t)=\overrightarrow{O'O}(t)+\overrightarrow{PO'}=\overrightarrow{O'O}(t)+\hat{i}\,x'+\hat{j}\,y'+\hat{k}\,z'$$

Le coordinate di **PO' ≡**(x',y',z') sono costanti rispetto anche al sistema di riferimento del laboratorio!, derivando, si trova che la velocità e l'accelerazione di ogni punto del corpo corrispondono a quella del punto **O'**. Praticamente solo la velocità di trascinamento.

Moto rototraslatorio

Un corpo in genere si sposta e ruota.
Per esempio una ruota di bicicletta che va dritta a velocità costante con perfetta aderenza al suolo, Il suo centro si muove di velocità $\mathbf{v_c}$, mentre un punto **P'** dello pneumatico descrive circonferenze rispetto al centro della ruota, e curve strane (ipocicloide se r<R, cicloidi r =R, epicicloide r>R) rispetto alla strada. Provate a disegnarle!
Supponiamo che il sistema della strada sia definito con l'asse x lungo la strada, l'asse y perpendicolare alla strada e z trasversale alla strada. Il centro della ruota avanza lungo la strada con velocità $\mathbf{v_c}$=(V_c,0,0,) la z e la y del centro sono costanti. Se all'istante iniziale il sistema di riferimento della ruota, con origine nel suo centro, è parallelo a quello stradale, subito dopo si disorienta, pur mantenendo parallelo l'asse di rotazione della ruota z' a z e il suo centro **C**≡(0,r,0) ad altezza r fissa da terra
Dove va il punto **P** dello pneumatico di coordinate interne r≡(r,0,0) dopo un tempo t?
Dopo un intervallo t la bicicletta si è spostata di s= v_ct e la ruota ed il suo sistema di riferimento sono ruotati di un angolo ϕ = -s/r =-v_ct/r . Occorre essenzialmente l'inverso della 4a), l'unica rotazione non nulla in questo caso, che fa passare dalle coordinate interna al laboratorio.

6) $$\vec{P}(t)=\vec{C}+\vec{v}_c t+R(\phi)\vec{r} \qquad e \qquad R(\phi)=\begin{vmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$x=v_c t+r\cos\phi$$
$$y=r\sin\phi$$
$$z=0$$

e derivando rispetto a t (ricordo che ϕ (t)= -v_ct/r).

7)
$$\dot{x}=v_c-r\dot{\phi}\sin\phi=v_c(1+\sin\phi)$$
$$\ddot{x}=-r\dot{\phi}^2\cos\phi=-\frac{v_c^2}{r}\cos\phi$$
$$\dot{y}=r\dot{\phi}\cos\phi=-v_c\cos\phi$$
$$\ddot{y}=-r\dot{\phi}^2\sin\phi=-\frac{v_c^2}{r}\sin\phi$$

la velocità di **P** lungo x è nulla quando **P** tocca terra ($\phi=-\pi/2$) ed è doppia quando è in alto!
E per y? pensare
E la accelerazione .... il moto del centro ruota è costante, quindi l'accelerazione deriva solo dal moto rotatorio, è una accelerazione centripeta !

Vettorialmente

Ma rivediamo la velocità ricordando la formula 5) derivata rispetto al tempo.

8)
$$\frac{d\,\overrightarrow{PO}}{dt}=\dot{\overrightarrow{O'O}}+\vec{\omega}\wedge\vec{r}=\vec{v}+\vec{\omega}\wedge R(\phi)\vec{r}$$
dove r è il vettore del punto P rispetto al riferimento interno

ω è la velocità angolare costante della ruota di modulo v_x/r, di direzione parallela all'asse z, ma con senso opposto. Dopo un intervallo di tempo t la ruota è ruotata di ϕ = -v_{bx}t/r =ω t attorno all'asse z.

$$\vec{r}(\phi)=R(\phi)\vec{r}\equiv(r\cos\phi,r\sin\phi,0)$$

che sostituito in 8) si ritrovano le velocità 7)

Derivando ancora trovi l'accelerazione.

9)
$$\frac{d^2\overrightarrow{PO}}{dt^2}=\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}=-\omega^2\vec{r}=-\omega^2\vec{r}$$

che corrisponde alla accelerazione della 7).

Le equazioni ricordano le relazioni di trasformazioni delle velocità e delle accelerazioni, già discusse tra due riferimenti in moto l'uno rispetto all'altro. In verità potremmo considerare il corpo rigido come lo spazio di un sistema di riferimento che trascina tutti i punti del corpo nel suo moto.