Pisa rev feb 11
Cap.20 v.11

Appunti di Fisica _I
Primo semestre

Meccanica
Sistemi a più corpi

Table of Contents

Introduzione

Sin qui ci siamo interessati ad un solo oggetto mobile, pensato come un punto marteriale, di dimensioni praticamente nulle. Questo legato a molle, o immerso in un campo di forze esterno, lo abbiamo fatto correre lungo traiettorie definite da tutte le forze in gioco. Le molle fra l'altro stavano legate a pareti ideali, stabili, insensibili ad ogni stimolo esterno, fisse nel nostro sistema di riferimento.
Un mobile un pochino più complesso, di dimensioni non trascurabili, può avere i punti del suo "corpo" in movimento l'uno rispetto all'altro e che interagiscono con le forze di campo diversamente.
Come va definita la velocità o l'accelerazione?
Per esempio un grosso sasso sicuramente non lo possiamo considerare un sistema di dimensioni trascurabili e in verità lo tratteremo, in seguito, come un grosso corpo rigido.

Sistemi a n particelle interagenti

Per il momento esaminiamo i casi in cui vi siano più particelle puntiformi in interazione tra loro. Ogni particella, là dove si trova, risente delle forze generate dalle altre compagne. Ricorda che la forza che una particella applica su di un'altra è esattamente uguale e contraria a quella che l'altra applica su di lei per il famoso terzo principio. Supponiamo inoltre che vi siano forze di campo esterne al gruppo, che interessano tutte o parte delle particelle dell'insieme.

Quindi ora, se vogliamo tentare di scrivere le equazioni del moto, certamente ne dovremo scrivere una bella lista, esattamente tante equazioni vettoriali quante sono le particelle puntiformi del nostro insieme.

1) $\vec{F}_i = m_i a_i = \frac{d q_i}{dt}$ con ovvio significato dei simboli, e

ricordo che l'indice "i" sta lì per individuare la particella i- esima.
Il numero di equazioni sono 3N se le particelle in gioco sono N e così sono sufficienti per risolvere il problema, anche se un po' complicato!. (quando N ≈10 [24] !)
Per il momento evidenziamo alcune caratteristiche principali dell'isieme delle particelle.

Sommiamo membro a membro tutte le equazioni.

$$\sum_{i=0}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=0}^{N} m_i a_i = \sum_{i=0}^{N} \frac{d q_i}{dt} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

$$dove\ \ \vec{Q}\ \ e'\,la\,quantita'\,di\,moto\ \ totale$$

$$\vec{Q} = \sum_{i=0}^{N} q_i = \sum_{i=0}^{N} m_i \vec{v}_i$$

$$e$$

2)

$$\vec{Q} = \sum_{i=0}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{N} m_i \vec{r}_i$$

$$definisco\ allora\ la\ media\ pesata\ dei\ raggi\ come\ Centro\ di\ massa$$

$$\vec{r}_B = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{N} m_i \vec{r}_i \quad con\ M\ la\ massa\ totale\ del\ sistema\ ottengo$$

$$\vec{Q} = \frac{d\, M \vec{r}_B}{dt} = M \vec{v}_B$$

Il centro di massa

La 2) contiene due definizioni: La quantità di moto totale **Q** e il vettore pesato $\mathbf{r}_{B,}$ che è detto *centro di massa (CM)* del sistema spesso indicato come Baricentro (vedi più avanti); un punto particolare che può anche non coincidere con nessuna particella del gruppo.

Intanto definiamo per il centro di massa:

1) *La quantità di moto totale di un sistema di punti materiali è uguale alla quantità di moto che avrebbe un punto materiale di massa uguale alla massa totale M pensato nel Centro di Massa del sistema.*

Ora ricordiamo il terzo principio.

Ogni particella interagisce con tutte le altre, quindi le forze sperimentate da una particella sono la somma di tutte le forze interne (voglio dire applicate dalle palline del gruppo) più le forze di campo esterne. Ora per il terzo principio, le forze interne tra due particelle sono sempre a coppia nella stessa direzione, hanno la stessa intensità, ma il senso opposto.
La prima equazioni delle 2), suddividendo le forze in forze interne $\mathbf{F}_i$ e forze esterne $\mathbf{F}_e$, si ottiene:

3)
$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}+\vec{F}_{ei}\right)=\sum_{i=0}^{N} m_i a_i=\sum_{i=0}^{N}\frac{d\,q_i}{dt}=\frac{d\vec{Q}}{dt}$$
Le forze interne si annullano~ identicamente
restano solo forze esterne
$$\text{poniamo}\quad \vec{F}_e=\sum_{i=1}^{N_e}\vec{F}_{ei}$$
si ottiene
$$\vec{F}_e=\frac{d\vec{Q}}{dt}$$

e cioè la I^0 equazione cardinale dei sistemi.

L'ultima equazione delle 3) si chiama I^0 *equazione cardinale dei sistemi,* che dice: *La derivata della quantità di moto totale di un sistema è uguale alla risultante delle sole forze esterne*
D'altra parte l'ultima equazione delle 3) formalmente è esattamente la "F=ma" del punto materiale.
Possiamo dire

Il centro di massa di un sistema di punti materiali si muove come un punto materiale di massa M soggetto alla forza $\mathbf{F}_e$.

Questa affermazione ci chiarisce meglio la definizione di *punto materiale*: questo deve essere piccolo, ma anche se è esteso (*grosso!)*, purché ci interessi solo moto d'insieme, cioè del suo baricentro e non della sua struttura interna, i risultati finali della sua traiettoria sono essenzialmente quelli di un punto materiale ideale.

Note

Se il nostro sistema è immerso nel *campo gravitazionale*, la forza applicata in ogni punto e:

4) $$\vec{F}_i = -G\frac{m_T m_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

che nel nostro sistema casalingo può essere semplificata a forza $\mathbf{F}_i = m_i\mathbf{g}$, che non dipende dal raggio e **g** è costante. Introdotta nella seconda delle 3)

5) $$\vec{F}_e = \sum_{i=0}^{i=n} m_i\vec{g} = M\vec{g}$$
e possiamo scrivere
$$M\dot{\vec{Q}} = M\vec{g}$$

Cosi': *la risultante delle forze di gravità che agiscono su di un sistema, coincide con la forza di gravità che agisce su di un punto materiale di massa uguale alla massa totale posto nel centro di massa del sistema.*
è come se il ***bari_centro*** delle forze peso corrispondesse al centro di massa.

D'altra parte, Il centro dei pesi $P_i = m_i\,g$, nel caso di g costante, coincide con il centro delle masse e per questo spesso si indica il Centro di Massa anche con il termine di *Baricentro*.

$$\vec{R}_p = \frac{\sum P_i\vec{r}_i}{Mg} = \frac{g\sum m_i\vec{r}_i}{Mg} = R_b$$

(Baricentro e Centro di Massa coincidono? che errore si fa!? pensa ad una asta verticale in campo gravitazionale ed immagina di calcolare il baricentro senza approssimazione. La forza di attrazione in alto e' minore della forza in basso, il baricentro apparirà leggermente più in basso rispetto al centro di massa.)

Più sistemi

Dato un sistema A ed un sistema B come interagiscono! Le forze sono suddividibili in

1. esterne per A e B : F_{eA} , F_{eB}
2. interne ad A : F_{iA}
3. interne a B : F_{iB}
4. di A su B : F_{AB}
5. di B su A : F_{BA}

Nell'unione dei due sistemi, si ha un sistema globale C= A+B, le cui forze interne continuano ad annullarsi, quelle di A su B per il terzo principio annulleranno quelle di B su A (4-5), restano le forze esterne come somma di quelle applicate su A e su B.

Il sistema C è ancora un sistema che obbedisce a tutte le leggi della dinamica dei sistemi. Ora se C esperimenta (sente) ancora forze esterne non nulle, dovremmo pensare che nello spazio in cui C si trova deve esserci almeno un altro sistema che interagisce con lui. Potremmo inglobare anche questo ultimo sistema in C e lavorare con un sistema un po' più complesso.....

Sistema isolato

Il processo di sopra ci conduce a inglobare tutto l'universo in un unico sistema con l'ovvia difficoltà di non riuscire poi a calcolare nulla.!!!
Supponiamo tuttavia che un sistema invece, magari in un punto remoto dello spazio intergalattico, non risenta di forze esterne. In questo caso diremo che il *sistema è isolato.* Esso costituisce un mondo a se che si evolve senza interagire con il resto dell'universo !!!.
La prima conseguenza deriva direttamente dalla equazione cardinale. E cioè la *conservazione della quatità di moto totale*
Dalla 3)

6) $$\frac{d\vec{Q}}{dt}=0 \quad ovvero \quad \vec{Q}=\vec{Costante}$$

che è utile nella soluzione dei problemi.
É anche vero che pur essendoci forze esterne possa accadere che F_e sia nulla e la relazione di sopra valga comunque.
Quando accade?
Immaginate un sistema di due particelle di massa m, e carica opposta; queste una volte immerse in un campo elettrico costante esterno risentono di una forza di pari intensità e direzione, ma di segno opposto. Somma totale pari a zero!

Convenienza della scelta dei sistemi.

Spesso abbiamo parlato di un mobile, o punto materiale, immerso in forze esterne. In effetti abbiamo considerato il nostro mobile come un sistema indipendente che interagisce con un mondo esterno che di fatto immaginiamo fisso e costante come se esso non interferisse con il nostro mobile. In effetti questo è falso, tuttavia possiamo trattare il problema proprio come abbiamo fatto poiché il sistema esterno al mobile è tanto immenso che praticamente non si altera al variare del nostro sistema. Tutto sommato tratteremo come *esterno* tutto quello il cui moto è noto a priori in funzione del tempo e non viene alterato; per esempio i nostri esperimenti sulla terra devono tener conto delle forze reali ed apparenti che la terra applica sui nostri sistemi, senza preoccuparsi di quanto accade alla terra stessa!

Il momento angolare

Dalle infinite equazioni F=ma delle nostre particelle abbiamo derivato essenzialmente una sola equazione globale, ma utile. Possiamo ricavare un'altra equazione indipendente sfruttando il momento angolare che ciascuna particella ha rispetto ad un polo O.

Calcoliamo il momento angolare dell N particelle di un sistema rispetto ad un polo fisso, O, per esempio l'origine di un sistema di riferimento.
Vedi il capitolo 13.

7)
$$\vec{L}_i=\vec{r}_{io}\times m_i\vec{v}_i$$
$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_{io}\times m_i\vec{v}_i \quad \textit{momento angolare totale}$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}(\vec{r}_{io}\times m_i\vec{v}_i)=\sum_{i=1}^{N}\dot{\vec{r}}_{io}\times m_i\vec{v}_i+\vec{r}_{io}\times m_i\dot{\vec{v}}_i=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_{io}\times\vec{F}_i=\vec{M}$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$$

Il momento delle forze può essere riscritto introducendo le forze interne ed esterne

8)
$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_{io}\times(\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{ki}+\vec{F}_{ei})=\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_{io}\times\vec{F}_{ki}+\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_{io}\times\vec{F}_{ei}$$

Le forze interne agiscono a coppie nella stessa direzione, sulla stessa retta di azione, con la stessa intensità , ma con senso opposto e quindi il *momento delle forze interne si annulla*. Restano le sole forze esterne.

9)
$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_{io}\times\vec{F}_{ei}=\vec{M}_e$$

Momento angolare rispetto ad un polo Ω non fisso

Nel caso in cui il polo di riferimento sia in moto con velocità V_Ω costante , il risultato 9) va rivisto. Si sostituisce nella 7) il vettore $\mathbf{R}_{iO}$ con $\mathbf{R}_{i\Omega} = \mathbf{R}_{iO} - \mathbf{R}_{\Omega O}$ e si procede con le derivate, ricordando che $d\mathbf{R}_{iO}/dt = \mathbf{v}_i$, e che $d\mathbf{R}_{\Omega O}/dt = \mathbf{v}_\Omega$, segue :

9a) $$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt}=\frac{d}{dt}\sum \vec{r}_{i\Omega}\times m_i\vec{v}_{i\Omega}=\sum \vec{r}_{i\Omega}\times m_i\frac{d\vec{v}_{i\Omega}}{dt}+\sum\frac{d\vec{r}_{i\Omega}}{dt}\times m_i\vec{v}_{i\Omega}$$
$$=\vec{M}^e_\Omega+\sum\frac{d(\vec{r}_{io}-r_\Omega)}{dt}\times m_i(\vec{v}_{io}-\vec{v}_\Omega)=\vec{M}^e_\Omega-\vec{v}_\Omega\times\vec{Q}$$

Nel caso in cui $\mathbf{v}_\Omega$ è nulla o è parallela alla direzione di moto del sistema, (cioè a $\mathbf{v}_B$) la 9a) si riduce formalmente alla 9). (fare il conto?)
Nel capitolo dei corpi rigidi approfondiremo meglio questi concetti.

Seconda equazione cardinale dei sistemi.

La 9a) è la *seconda equazione cardinale dei sistemi e* fa coppia con la prima equazione cardinale già discussa.
Certo che la forma 9), in cui il polo è fisso o si muove nella direzione di v_B, è più semplice e per tutti i casi in cui essa vale e possiamo di usarla e quindi assumere che *la derivata del momento angolare totale di un sistema è uguale al momento delle sole forze esterne*.
Partendo dalla 9) si possono esprimere gli r_{io} e i v_i rispetto al CM.

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_{io}\times m_i\vec{v}_i=\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_{bo}+\vec{r}_{ib})\times m_i(\vec{v}_b+\vec{v}_{ib})=\vec{r}_{bo}\times\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_b+\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_{ib}\times m_i\vec{v}_{ib})$$

10) $$\vec{L}=\vec{L}_b+\vec{L}_r$$

Gli altri due termini si annullano banalmente. *Restano solo il momento angolare rispetto ad O come se tutta la massa fosse concentrata nel CM e il momento angolare di rotazione rispetto al CM.*

Poichè nel riferimento del centro di massa per definizione $\mathbf{v}_b$ è nulla, segue che *il momento angolare rispetto al CM è uguale al momento angolare di rotazione rispetto al CM.*

Il momento delle forze esterne può esprimersi:

11) $$\vec{M}_e=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_{io}\times\vec{F}_{ei}=\vec{r}_{bo}\times\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{ei}+\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_{ib}\times\vec{F}_{ei}$$

il momento rispetto al baricentro può essere nullo se la risultante delle forze esterne è nulla, quindi *il momento delle forze esterne non dipende dal polo se la risultante sul sistema è nulla*.

Se poi le forze esterne *sono proporzionali alle masse,* il secondo termine, quello nel *CM, si annulla.*

Conservazione del momento angolare
Se il momento delle forze esterne è nullo allora si conserva il momento angolare totale del sistema. Questo deriva ovviamente direttamente dalla seconda equazione cardinale e ovviamente vale in tutti i casi in cui si sia in presenza di forze centrali.