Pisa 16.02.09
Cap.19.v.02

Appunti di Fisica _I

Primo semestre

Il pendolo

Sommario

Il pendolo semplice

Consideriamo un punto materiale in campo gravitazionale vincolato a muoversi, senza attrito, a distanza fissa da un punto e ci limitiamo allo studio nel caso di *un moto su di un piano*. Questo è un pendolo di massa m appeso ad un punto con una asta rigida senza massa o con un filo inestendibile di lunghezza l (filo senza massa!).
Le forze che agiscono sul punto sono la forza peso m**g** verso il basso e la reazione vincolare R che è sempre diretta secondo il raggio e di senso negativo se punta verso il centro. Inizialmente proprio per evitare problemi con la reazione vincolare, ***si sceglie un' asticella rigida***, invece del filo per appendere la massa.

L'equazione da scrivere è:

1) $$m\ddot{\vec{r}}=m\vec{g}+\vec{R} \qquad ovvero\,tenendo\,conto\,del\,vincolo \qquad ml\ddot{\hat{r}}=m\vec{g}+\vec{R}$$

il modulo di r è fisso e vale l. Sviluppando come sappiamo, la derivata del raggio vettore, tenendo conto che **r** in modulo è costante, e sostituita nella 1) si ottiene:

2) $$m\ddot{\hat{r}}=m(\dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r}-\omega^2\vec{r})=m(\ddot{\theta}\hat{T}-\dot{\theta}^2\hat{r})=m\vec{g}+\vec{R}$$

Con θ l'angolo che il pendolo fa con la verticale; **T** il versore della tangente.
Da qui ricaviamo due equazioni scalari indipendenti , una parallela alla tangente e l'altra paralleta al raggio (tangente e raggio sono mutuamente perpendicolari) .La forza peso si proietta sulle due direzioni.

3)
$$m\,l\,\ddot{\theta}=-m\,g\,sen\theta \quad ovvero \quad \ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\,sen\theta \qquad che\ e'\ \| T$$
$$-ml\,\dot{\theta}^2=m\,g\cos\theta+R \quad ovvero \quad R=-m\,g\cos\theta-ml\,\dot{\theta}^2 \qquad che\ e'\ \perp T$$

La prima equazione, è sufficiente per conoscere l'equazione oraria di θ e quindi il moto del pendolo; In essa appare un termine che dipende dalla lunghezza del pendolo e da g.

Si definisce $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$ Nota che la massa non entra esplicitamente nel moto !.

L'altra equazione serve per ricavare il valore della reazione vincolare.

Reazione vincolare

Ricordiamoci anche che il sistema è conservativo. Quindi imponendo la conservazione dell'energia scriviamo

4)
$$E=\frac{1}{2}m\,v^2+mg\,(l-l_z)=\frac{1}{2}m(l\,\dot{\theta})^2+mg\,l(1-\cos\theta)$$

Dove si è scelto il potenziale nullo quando il pendolo è sulla verticale.
Se si deriva la 4) rispetto a t si trova immediatamente la prima delle 3... provare. Dalla 4) non si puo' dedurre la seconda equazione poichè nella conservazione della energia non appare esplicitamente la reazione vincolare. Possiamo ricavare la velocita angolare.

Divido la 4) per ml^2 per ottenere

$$\dot{\theta}^2=2\left(\frac{g}{l}\cos\theta+\frac{E}{ml^2}-\frac{g}{l}\right)$$

5)

che sostituiamo nella seconda delle 3. Scompare la velocità angolare e si ottiene la reazione vincolare, in funzione dell'angolo.

6)
$$2\left(\frac{g}{l}\cos\theta+\frac{E}{ml^2}-\frac{g}{l}\right)=-\frac{g}{l}\cos\theta-\frac{R}{ml}$$

$$R=-2\frac{E}{l}-3\mathrm{mg}\cos\theta+2\mathrm{mg}$$

Qualche conclusione

- Se E < 2mgl, vedi la 4), la velocità si annulla per un valore di θ minore di π . Il moto oscilla tra θ_{max} e $-\theta_{max}$, mentre la reazione in θ_{max} è

  $$R=-mgcos\theta_{max}$$

  Se l'agolo massimo supera π/2 la reazione cambia segno e quindi non potremmo usare un filo per fare il pendolo!

- Se E > 2mgl, la velocità angolare non è mai nulla. Il moto è una rotazione a velocità non uniforme e la reazione non cambia mai di segno. Se E > di 5/2 mg la reazione è sempre positiva.

- Il caso E = 2mgl, è un caso limite. Il mobile resta fermo nella posizione più alta (se si usa una asta), in equilibrio instabile (se oscilla tende ad avvicinarsi a quella posizione in alto senza mai raggiungerla).

Le piccole oscillazioni

Spesso ci interessano solo le piccole oscillazioni. I valori per cui θ_{max} sono piccolissimi.
è il caso in cui l'equazione 3) del moto per angoli piccoli diventa :

7)
$$\ddot{\theta}=-\omega_0^2\theta \quad con \quad \omega_0^2=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

non c'è da dire molto. L'equazione è ben nota , è l'equazione di un oscillatore armonico!
Le soluzioni sono ben conosciute.
Quello che va notato è che il periodo di oscillazione del pendolo (semplice) non dipende dall'ampiezza, ma solo dalla sua lunghezza. Anzi nel 1600 su uso' il pendolo per misurare l' accelerazione di gravità!
Quello che dobbiamo ancora definire è che cosa si indica con piccole oscillazioni.
Ricordo che siamo arrivati alle equazione del moto sviluppando il seno in funzione di θ e fermandoci al primo termine dello sviluppo

8)
$$\sin\theta_{max}=\theta_{max}-\frac{1}{6}\theta^3_{max}+....=\theta_{max}\left(1-\frac{1}{6}\theta^2_{max}\right)+....$$

per θ_{max} = 0.2 5 rad il seno differisce dall'angolo per circa 1% , mentre per θ_{max} = 0.1 rad la differenza è dello 0.01%. Ovviamente questo errore si riflette sul periodo che non è certo isocrono con l'ampiezza, come invece sono gli oscillatori elastici.

Ebbene non siamo adesso in grado di sviluppare un algoritmo che ci dia un ordine di grandezza sul valore accettabile della massima ampiezza di oscillazione. Tuttavia è stato dimostrato che se vogliamo aver un errore relativo sul periodo di oscillazione minore del 1% l'angolo di oscillazione non deve superare 0.4 radianti ; cioè deve essere minore di 23^0.

Quindi se costruiamo un pendolo che ha un periodo di un secondo

9) $$\tau=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad segue\ \ per\ t\,\tau=1 \qquad l=\frac{g}{4\pi^2}\approx 25\,cm$$

la sua lunghezza sarà di 25 centimetri mentra la sua oscillazione massima, non deve superare i 10 centimetri se vogliamo che differisca dal secondo meno del permille.!

Oscillazione smorzate e forze dissipative

Il moto di un pendolo in regime di piccole oscillazioni o un oscillatore che si muove in aria, in un fluido che tende a frenare il moto, è descritto in prima approssimazione dalla equazione classica di uno oscillatore con più un termine del tipo $F_t = -\gamma \mathbf{v}$ che tiene conto della resistenza viscosa generata dall'aria.

10) $$\begin{aligned} &m\,l\,\ddot{\theta}=-mg\,\theta-\gamma\,l\,\dot{\theta} \quad da\,cui\\ &\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\theta-\frac{\gamma}{m}\dot{\theta} \quad da\,cui\\ &\ddot{\theta}=-\omega_0^2\theta-\frac{1}{\tau}\dot{\theta} \quad con\,\tau=\frac{m}{\gamma}\end{aligned}$$

L'ultima equazione delle 10) è quella del pendolo semplice più un termine che dipende da un parametro τ, che come vedremo è legato allo smorzamento del moto.
L'equazione equivalente per un oscillatore è

11) $$m\,\ddot{x}=-k\,x-\gamma\,\dot{x} \quad con \quad \omega_0^2=\frac{k}{m}$$

Qui l'energia totale non si conserva, anzi sfruttiamo il terema delle forze vive e cioè moltiplichiamo l'equazione 11) per la velocità per scoprire

12)
$$m\ddot{x}\dot{x} = -kx\dot{x} - \gamma\dot{x}^2 \quad da\ cui$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = -\gamma v^2 \quad ovvero$$
$$dE = -\gamma v\ \ v\,dt = F_\tau v\,dt = F_\tau dx$$

che l'energia totale, cioè quella cinetica più quella potenziale non è costante, anzi degrada con il quadrato della velocità e , come si capisce dall'ultima riga, la perdita di energia in effetti va nel lavoro della *forza dissipativa*.

La soluzione della 11) non è banale se non si conoscono i numeri immaginari.

Comunque si noti che se γ fosse nulla, il moto sarebbe quello tipico di un oscillatore. Se invece k fosse nulla (sparisce la parte elastica), il moto si riduce a quello di un moto in un mezzo viscoso; una semplice soluzione esponenziale del tipo $x = e^{-\gamma x}$ andrebbe bene, come si puo' dimostrare sostituendola nella 11) .

Visto che il moto è un insieme dei due, prendiamo una soluzione intermedia del tipo (il prodotto delle due)

13)
$$x = A e^{-\alpha t} \cos(\omega t - \phi)$$

che potremmo sostituire nella 11) e procedere con le derivate facendo un po' di algebra piuttosto noiosa. (comunque provate: alla fine vi troverete con una equazione uguagliata a zero essenzialmente con due termini, uno in seno e l'altro in coseno. I coefficienti di questi due termini devono essere nulli identicamente se la 13) deve essere soluzione per ogni valore del tempo. Dalle due condizioni si ricavano i valori

14)
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}\gamma^2} \qquad con \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$
$$\alpha = \frac{1}{2}\gamma$$

Possiamo invece usare una tecnica matematica più affascinate, quella che passa per i numeri complessi. Ricordiamo intanto che

$\frac{d}{dt}e^{cx} = c\,e^{cx}$ e che $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$ e finalmente che $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$

Adesso imponiamo la soluzione $x = A e^{\alpha t}$ e sostituiamola in 11) e troviamo l'equazione associata

15)
$$Am\alpha^2 e^{\alpha t} = -Ak\, e^{\alpha t} - \gamma\, \alpha\, e^{\alpha t}$$
$$\textit{ovvero l'equazione associata}$$
$$\alpha^2 + \frac{\alpha}{\tau} + \omega_0^2 = 0$$

che ammette due soluzione per α:

16)
$$\alpha_+ = -\frac{1}{2\tau} + i\,\omega \quad \alpha_- = -\frac{1}{2\tau} - i\,\omega \quad con \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$$
$$e^{-\alpha_+ t} = e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{+i\omega} = e^{-\frac{t}{2\tau}} (\cos\omega\, t + i \sin\omega\, t)$$
$$e^{-\alpha_- t} = e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{-i\omega} = e^{-\frac{t}{2\tau}} (\cos\omega\, t - i \sin\omega\, t)$$

e finalmente due soluzioni reali che si ottengono sommando o sottraendo dividendo per *2i.*
Le due soluzioni si sommano con due coefficienti arbitrari del tipo c1=sin (f) e c2 = cos(f) per ottenere sfruttando le formule di prostaferesi la formula in cui f è il parametro della fase iniziale del moto.

17) $$x = e^{-\frac{t}{2}\tau} (c_1 \cos\omega\, t + c_2 \sin\omega\, t) = e^{-\frac{t}{2}\tau} A \cos(\omega\, t - \phi)$$

Quindi:
- ω è la nuova frequenza; diminuisce a causa dell'attrito
- se ω_0 < 1/2t pendolo è sovrasmorzato e non oscilla
- se ω_0 >1/2t il pendolo oscilla ma decresce la sua ampiezza
- τ definisce il periodo di smorzamento; dopo 2τ l'ampiezza si è ridotta di 1/e
- Q= $\omega_0\tau$ = $2\pi\, \tau/T_0$ definisce la bontà dell'oscillatore come 2π volte il numero di oscillazioni che avvengono nel tempo caratteristico di smorzamento.

Q è detto il Q-valore del sistema e più alto è, più sono le oscillazioni prima di ridurre a zero l'ampiezza!

Oscillazioni forzate e risonanza

Da fare.......

Il pendolo sferico

Il pendolo non è più vincolato a muoversi su di un piano, ma puo' muoversi su di una superfice sferica. Il moto è ancora descritto dalla equazione 1) solo che adesso abbiamo due gradi di libertà che descrivono la posizione del pendolo sulla superfice sferica. Per questo ci converrà usare i due angoli θ e ϕ passando a coordinate sferiche.

18)
$$x = l\sin\theta\cos\phi$$
$$y = l\sin\theta\sin\phi$$
$$z = \cos\theta$$

Ed esprimo la velocità in funzione di queste, ricordando che l è costante:

19)
$$v_x = l\dot\theta\cos\theta\cos\phi - l\dot\phi\sin\theta\sin\phi$$
$$v_y = l\dot\theta\cos\theta\sin\phi + l\dot\phi\sin\theta\cos\phi$$
$$v_z = -l\dot\theta\sin\theta$$
$$v^2 \equiv v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = l^2(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta)$$

A questo punto, invece di continuare a far derivate, ricordiamoci che il problema ha due costanti del moto, l'energia totale e la componente z del momento angolare L_z

20)
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}ml^2(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) - mgl\cos\theta$$
$$L_z = m(xv_y - yv_x) = ml^2\dot\phi\sin^2\theta \qquad \textit{sostituendo } \dot\phi \ \textit{ sopra}$$
$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + \frac{L_z^2}{2ml^2\sin^2\theta} + mgl(1-\cos\theta)$$
$$U_{eff} = \frac{L_z^2}{2ml^2\sin^2\theta} + mgl(1-\cos\theta)$$

e così, sfruttando la conservazione del momento angolare, si esprime l'energia in funzione della unica variabile angolare. Inoltre si definisce un potenziale efficace che dipende dalla stessa variabile che è composto da due termini: quello noto gravitazionale più quello dipendente da L_z, detto anche *termine centrifugo o bariera centrifuga,* che va ad infinito per θ tendente a zero.

Si pensi ad un sistema di energia totale E_0 e si immagini un grafico in cui si riporta l'andamento del potenziale in funzione del coseno per L_z diverso da zero. Una forma concava che tende all'infinito

vicino a zero ed ha un minimo nel punto in cui si annulla la derivata del potenziale rispetto a θ, cioè là dove si annullano le forze totali, reali ed apparenti che agiscono sul punto mobile.
Scelta una energia E, si traccia una retta parallela all'asse orizzontale del coseno che taglia la curva del potenziale in due punti che sono soluzione dell'equazione $E=U_{eff}$.
Il moto avverrà tra questi due valori limiti (dove il termine cinetico è positivo o nullo). Il moto proiettato sul piano perpendicolare all'asse di oscillazione apparirà come una rosetta di tantissimi petali, ed è un moto che in genere non si chiude su se stesso a meno che il periodo di rotazione non risulti commensurabile con il periodo di oscillazione. Nel caso che l'energia sia tale che la soluzione della candizione di sopra sia unica, cioè corrisponda con il minimo del potenziale efficace, il moto è una circonferenza di raggio costante.

Conservazione del piano di oscillazione

Nel caso in cui il momento angolare L_z è nullo il moto avviene su di un piano contenete l'asse verticale del pendolo. Infatti dalla definizione di $L_z = 0$ nella 20) ricaviamo che (df/dt)^2 =0 ovvero ϕ è costante. Cioè il pendolo oscilla, varia θ, ma non ruota attorno all'asse verticale.! Si dice che *mantiene il piano di oscillazione* e siamo ricondotti al problema di prima.

Pendolo e equazioni canoniche

Per finire ricordo che possiamo anche ricavare le equazioni del moto per i due angoli, in modo del tutto generale dai due integrali primi derivando rispetto al tempo :

$$da \quad \frac{d}{dt}E \quad segue$$

$$ml\ddot{\theta}=\frac{L_z^2\cos\theta}{ml^3\sin\theta^3}-mg\sin\theta$$

$$da \quad \frac{d}{dt}L_z=ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta \quad segue$$

$$\ddot{\phi}=-2\dot{\phi}\dot{\theta}\,tang\,\theta$$

Che coincidono con le equazioni che abbiamo già trovato.

Un' alternativa

Ma possiamo trovare le equazioni anche immaginando di essere su di un sistema ruotante il cui asse x coincide sempre con l'asse del pendolo. Ma è un po' complicato...