Pisa gennaio 2009
Cap.18.v.03

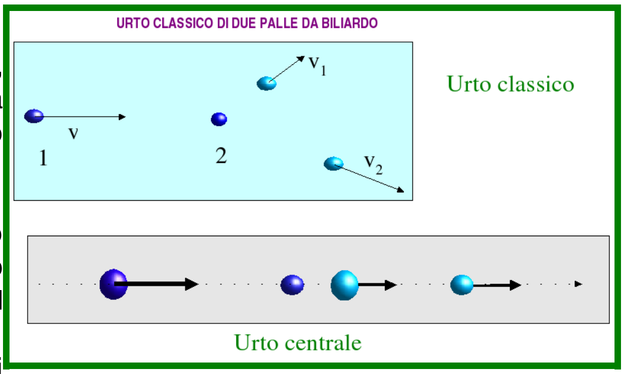
Appunti di Fisica _I

Primo semestre

Meccanica

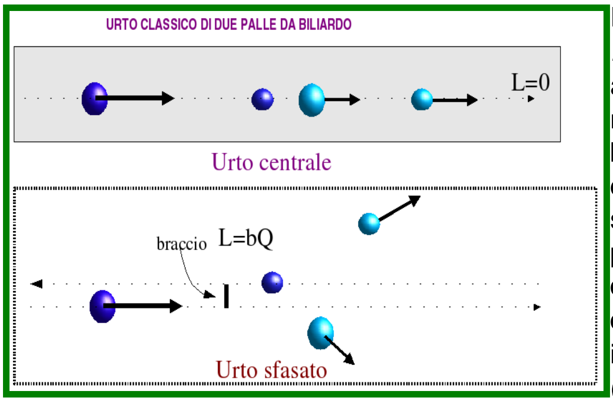
Sommario

Due corpi e gli urti



Si consideri due particelle di massa m_1 e m_2, che viaggiando nel nostro laboratorio l'una contro l'altra con velocità $\mathbf{v}_{01}$ e $\mathbf{v}_{02}$, che si urtano come due bocce.

Supponiamo che le particelle non siano sottoposte a forze esterne, il sistema è isolato Quindi si conserverà la **Q** totale durante tutto il processo di urto.
Per il momento non facciamo nessuna ipotesi sulla conservazione della energia.
I gradi di libertà del sistema sono 3+3 = 6 e le equazioni vettoriali **F**=m**a** sono 2 e corrispondono a 6 equazioni scalari; se sono note le forze il problema è perfettamenete risolubile. D'altra parte non sempre le forze sono note, allora sfruttando gli integrali primi (ovvero le simmetrie del sistema) e vediamo quanto possimo dire.



Il momento angolare è conservato, visto che le *forze sono solo interne,* e pertanto il moto avviene su di un piano definito dal vettore **L *,*** il momento angolare di rotazione attorno al baricentro. La quantita di moto totale si conserva poichè non ci sono forze esterne; ne segue che nel sistema del baricentro le due palline viaggiano lungo la stessa direzione o in direzioni parallele distanziate da un braccio che dipende dal modulo di **L**, e appaiono muoversi in senso opposto. Se l'urto è centrale **L** = 0 (ricordate le due bocce del biliardo che si urtano centralmente) le palline cambiano la loro velocità dopo l'urto, ma continuano a muoversi sulla stessa direzione, qui il piano non è definito; se l'urto non è centrale le due direzioni di moto non coincidono (addirittura potrebbero non urtarsi..!), possiamo comunque calcolare il momento **L** della quantità di moto rispetto al baricentro, individuado il piano in cui avviene tutto il moto.

Nel laboratorio il moto può sembrare un pò più complicato, ma si ottiene, come vedremo, da quello baricentrale con una banale trasformazione di sistema di riferimento.

Vediamo di definire meglio il processo :

1. Il sistema di due sfere nello spazio ha 6 gradi di libertà. Il moto è descritto da due equazioni vettoriali del tipo $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$**,** equivalenti a 6 equazioni scalari. $\mathbf{F}_i$ e la forza di interazione tra le due sfere e $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$;
2. Il momento angolare **L** è costante allora il moto avviene su di in piano fisso.

Possiamo al piano su cui il moto avviene; attenzione equivale a fissare due angoli che fissano la direzione della normale al piano, ovvero la direzione di **L.** Si passa da 6 a 4 gradi dilibertà.

3. Su quel piano il moto è descritto da due equazioni vettoriali (**F**=m**a**) a due componenti (x e y); quindi quattro equazioni scalari.
4. Sommando le due equazioni si ottiene: $m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 = d/dt\mathbf{Q} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$ Quindi si conserva la **Q** totale; il centro di massa si muove lungo una retta a velocità costante o sta fermo.

Il moto lo suddividiamo in tre momenti distinti:

1. le particelle al tempo $t = -\infty$ sono lontane e non risentono delle loro forze di interazione
2. Al tempo t=0 avviene l'interazione, ma attenzione non conosciamo il tipo della forza in gioco che per il momento immaginiamo a cortissimo raggio di azione; sappiamo solo che c'è un urto e le particelle non si rompono!
3. le particelle al tempo $t = +\infty$ sono nuovamente ben separate e non risentono più delle loro forze di interazione

Partiamo dalla quantità di moto totale conservata, che quindi è un *integrale primo* del moto.

Il centro di massa si muove di velocità $\mathbf{v}_b$ costante definita dal rapporto della quantità di moto con la massa M totale delle due palline.

1)
$$\vec{Q}_0 = m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} \qquad Q \; funzione \; di \; m, v \; all'istante \; iniziale$$
$$\vec{Q}_0 = M \vec{v}_b = M \frac{d\vec{r}_b}{dt} \qquad che \; e' \; costante \; segue \; d\frac{\vec{r}_b}{dt} = \vec{V}_b = \vec{Cost}$$
$$\vec{r}_b = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \qquad il \; baricentro$$

si deriva l'equazione oraria del baricentro:

2)
$$\vec{r}_b = \vec{r}_0 + \frac{\vec{Q}_0}{M} t \qquad dove \quad \vec{r}_0 \quad punto \; di \; partenza \; iniziale$$
come ci si aspettava

ma quello che è più importante, dalla ultima, deriva una relazione tra le velocità prima e dopo l'urto tra l'altro in forma vettoriale

2b)

$$m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = m_1 \vec{v}_{f1} + m_2 \vec{v}_{f2}$$

o in componenti con la particella 1 dotata di velocità iniziale v_0 lungo x e l'altra ferma:

$$m_1 v_{x1} + m_2 v_{x2} = m_1 v_0$$
$$m_1 v_{y1} + m_2 v_{y2} = 0$$

usando gli angoli con cui emergono le particelle dopo l'urto

$$m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2 = m_1 v_0$$
$$m_1 v_1\, sen\,\theta_1 + m_2 v_2\, sen\,\theta_2 = 0 \quad \textit{La quantità di moto trasversale è sempre nulla!}$$

Se **Q=** 0, oppure siamo nel sistema baricentrale dove **Q** è nullo per definizione, valgono le seguenti relazioni:

2c)

$$m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = 0 \quad \textit{prima dell'urto}$$
$$m_1 \vec{v}_{f1} + m_2 \vec{v}_{f2} = 0 \quad \textit{dopo l'urto vale ancora}$$

Queste equazioni ci dicono che le velocità finali sono ancora inversamente proporzionali alle masse e in direzione opposte per conservare l'impulso totale, ma non fissano i valori assoluti delle velocità finali, nè la direzione, anche se sappiamo tutto su quelle iniziali. Solo nel caso in cui conoscessimo il modulo di una velocità finale potremmo dedurne l'altro modulo, ma non la direzione di volo. Se conoscessimo un vettore **v** finale potremmo dedurne interamente l'altro.

La conservazione del momento angolare impone una condizione ben precisa sulla distanza b (braccio) tra le direzioni di moto delle due particelle. Nel baricentro dove la quantità di moto totale è per definizione nulla ($\mathbf{q}_1 = m_1 \mathbf{v}_1 = -\mathbf{q}_2 = -m_2 \mathbf{v}_2$)

2d)

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{q}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{q}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{q}_2$$
$$|\vec{L}| = b\, m_2 v_2 = b\, q \qquad con\, q = m_2 v_2$$

una volta nota la velocità $\mathbf{v}_2$ dopo l'urto, è facile ricavare la distanza b tra le due direzioni di moto delle due palline viste nel loro baricentro.

Purtroppo finchè non sapremo la natura della interazione non saremo in grado di risolvere completamente il moto.

Energia si conserva

Se l'energia si conserva, l'urto è detto *perfettamente elastico*, cioè non c'è nessuna perdita di energia nell'urto! Se l'urto fosse *anelastico* le palline dopo l'urto risulterebbero deformate!
Dunque, l'energia totale prima dell'urto e prima di interagire, è tutta energia cinetica e tale sarà dopo l'urto, cioè quando le palline sono nuovamente separate e non interagiscono più tra loro.
In formula

3a) $$\frac{1}{2}m_1 v_{01}^2+\frac{1}{2}m_2 v_{02}^2=\frac{1}{2}m_1 v_{f1}^2+\frac{1}{2}m_2 v_{f2}^2$$

che con le equazioni $$m_1\vec{v}_{01}+m_2\vec{v}_{02}=m_1\vec{v}_{f1}+m_2\vec{v}_{f2}$$

formano un sistema di **tre** equazioni (una per la conservazione dell'energia e due per la quantità di moto sul piano del moto) . Le incognite sono 4, le componenti delle velocità finali delle due particelle, oppure i moduli delle due velocità e i due angoli che individuano la direzione delle palline dopo l' urto. Quindi il sistema non è sufficiente per risolvere il moto, tuttavia se conoscessimo la direzione di moto di una delle palline dopo l' urto, saremmo in grado di ricavare tutti gli altri parametri (provare?).
Vediamo lo stesso problema nel baricentro impostando le stesse equazioni di sopra nel baricentro. Qui le particelle prima dell'urto procedono l' una contro l'altra in modo da fare una quantità **Q** = $\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2$ di moto totale nulla. Dopo l'urto la quantità di moto deve essere ancora nulla e quindi risulta che le quantità di moto delle singole palline saranno uguali, ma dopposte. Il modulo della della quantità di moto di ciascuna pallina si calcola sfruttando l'equazione dell'energia nel baricentro prima e dopo l'urto

3b) $$\vec{q}_1+\vec{q}_2=0 \qquad con \qquad \vec{q}=\vec{q}_1=-\vec{q}_2$$
$$E=\frac{1}{2}m_1 v_{01}^2+\frac{1}{2}m_2 v_{02}^1=\frac{1}{2}\frac{q_1^2}{m_1}+\frac{1}{2}\frac{q_2^2}{m_2}=\frac{1}{2}q^2\frac{M_T}{m_1 m_2}$$

che se si conserva. Da qui ricavo la velocità delle palline nel baricentro del sistema e poi se voglio passo al laboratorio componendo le velocità trovate con la velocità del baricentro (vedi più avanti). *Quello che manca ancora è la direzione di moto di una delle due palline!* Questo parametro è definito dalla fisica dell'urto è può essere calcolato solo se si conosce l'espressione della forza di interazione delle due palline.

Nota:
E se l'urto non è elastico? Allora l'energia non si conserva perchè per esempio in parte è stata dissipata. Il problema si risolve ugualmente poichè la quantità di moto e il momento angolare si conservano ancora e pertanto sono ancora integrali primi validi. Le **q** delle palline dopo l'urto sono

ancora uguali in modulo e di senso opposto, tuttavia il loro valore assoluto sarà minore di quello iniziale, come si calcola dalla 3b), visto che l'energia è minore di quella del sistema prima dell'urto!
Vale anche il contrario! Se le due palline che sono o vengono in contatto liberano una energia interna (tipo esplosione), dopo l'urto (o dopo l'esplosione) si allontanano con una quantità di moto **Q** totale nulla e con un momento angolare pari a quello di prima, ma con una intensità della quantità di moto **q** di ciascuna pallina più elevata per tener conto dell'energia acquistata dall'*esplosione* .

Particelle in interazione e la massa ridotta

Consideriamo due corpi isolati: siano essi due pianeti o due particelle in interazione tra loro.
Le equazioni cardinali per ciascuna massa del sistema sono:

4) $$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \qquad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}$$

che sommando o sottraendo dopo averle moltiplicate per la massa, (come si fa nel problema dei due corpi)

5) $$\begin{aligned}
&\textit{sommando}\\
&m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = M \ddot{\vec{r}}_b = 0\\
&\textit{poi moltiplicando la prima per } m_2 \textit{ e la seconda per } m_1\\
&\textit{e differenziando segue}\\
&m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = (m_2 + m_1)\vec{F}_{21}\\
&\textit{più semplicemente}\\
&\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}\\
&\textit{con}\\
&\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}
\end{aligned}$$

si ottengono due nuove equazioni indipendenti. La prima semplicemente descrive il moto del baricentro. L'ultima descrive il moto di una particella di massa μ detta anche *massa ridotta,* sottoposta alla forza $\mathbf{F}_{12}$ e di coordinate **r** (che in effetti è il vettore distanza tra le due masse).
Quindi dalla prima equazione si ricava la legge oraria del baricentro, dalla seconda il moto delle due perticelle rispetto al baricentro. Come di passa da **r** e $\mathbf{r}_b$ alle equazioni orarie di $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$.? Basta prendere la definizione del Centro di Massa (CM) $\mathbf{r}_b$ e la definizione di **r** per ottenere:

6) $$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= \vec{r}_b + \frac{m_2}{M}\vec{r} = \vec{r}_b + \frac{\mu}{m_1}\vec{r}\\
\vec{r}_2 &= \vec{r}_b - \frac{m_1}{M}\vec{r} = \vec{r}_b - \frac{\mu}{m_2}\vec{r}
\end{aligned}$$

Si noti che $\mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ *ovvero* $\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$ se immaginiamo che i due corpi siano la terra ed il sole, allora la massa ridotta corrisponde essenzialmente a quella della terra che è sei ordine di grandezza minore rispetto a quella del sole. Il moto delle 5) si riduce banalmente supponendo (1) il sole e (2) la terra:

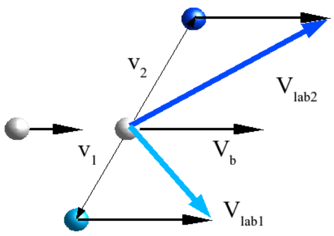
7)
$$\begin{aligned}
&\textit{il baricentro corrispsonde con il centro del sole } \vec{r}_s \simeq \vec{r}_b\\
&\textit{Il sole e' fisso nell'origine allora}\\
&\vec{r}_s=\vec{r}_b\simeq 0 \qquad \vec{r}_t=\vec{r}_b+\vec{r}\\
&\qquad m_t \ddot{\vec{r}}_t=-\frac{G M_s m_t}{r_t^2}\hat{r}_t
\end{aligned}$$

Gli urti dal CM al laboratorio

Immaginiamo due sfere che urtano, e supponiamo di aver risolto il problema nel CM, nel senso che conosciamo la direzione e la velocità con cui si allontanano le sfere dopo l'urto. Vogliamo conoscere il moto nel laboratorio e per questo possiamo applicare le 6) dopo l'urto, supponendo di conoscere la velocità del CM.
Nel laboratorio ecco il risultato:

6b)
$$\begin{aligned}
&\vec{r}_1=\vec{r}_b-\frac{m_2}{M}\vec{r}=\vec{r}_b-\frac{\mu}{m_1}\vec{r} \quad con \;\; \vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1 \;\; \textit{il vettore distanza 1-2}\\
&\vec{r}_2=\vec{r}_b+\frac{m_1}{M}\vec{r}=\vec{r}_b+\frac{\mu}{m_2}\vec{r}\\
&\vec{v}_1=\vec{v}_b-\frac{m_2}{M}\vec{v}=\vec{v}_b-\frac{\mu}{m_1}\vec{v}_r \quad con \;\; \vec{v}_r=\vec{v}_2-\vec{v}_1 \;\; \textit{la velocità relativa 1-2}\\
&\vec{v}_2=\vec{v}_b+\frac{m_1}{M}\vec{v}=\vec{v}_b+\frac{\mu}{m_2}\vec{v}_r
\end{aligned}$$

che geometricamente corrispondono a:



e cioè la velocità nel laboratorio di ciascuna pallina è la composizione vettoriale di due velocità.
Infine

- Si dimostri che nell'urto centrale elastico (momento angolare nullo) di due palline di pari massa con una inizialmente ferma, la pallina che urta si ferma e l'altra parte con la stessa velocità della prima.!
- Si dimostri che nell'urto elastico di due palline di pari massa con una inizialmente ferma, le due direzioni di volo dopo l'urto formano sempre un angolo di 90 gradi!

Sistemi non isolati

Immaginiamo due palline immerse in in campo di forze **f** costanti e in interazione tra loro.

9)
$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{f}$$
$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{f}$$

sono le equazioni del moto che si riducono a

$$M \ddot{\vec{r}}_b = 2\vec{f}$$
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$
$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21} + \frac{m_2 - m_1}{M} \vec{f}$$

il CM si muove come un punto materiale concentrato nel centro di massa del sistema sotto la forza 2**f** . Il vettore **r** è descritto dall'ultima equazione che tiene conto della differenza delle due forze esterne.
(Problema: si conserva il momento angolare?)

Vediamo un caso particolare
Se la forza esterna è proporzionale alla massa o è quella peso, $f_i = m_i g$, otteniamo:

10) $$M \ddot{\vec{r}}_b = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = M\vec{g} \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad \mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21} + \frac{m_2 \vec{f}_1 - m_1 \vec{f}_2}{M} = \vec{F}_{21}$$

in cui si nota ancora che il sistema cade come un corpo di massa M concentrato nel baricentro, mentre il moto interno non risente della forza esterna o di gravità poichè il termine con le forze $\mathbf{f}_i$ nell'ultima equazione si annulla identicamente; risultato valido anche per più corpi!
(siamo come in un ascensore in caduta libera... ci siamo liberati del peso!!)

(Problema: se la forza peso non la considerassimo costante, (ma come veramente è).. che accade ?)

Moto di due corpi legati elasticamente in campo gravitazionale

Due particelle interagiscono tra loro in modo elastico, scriviamo immediatamente le equazioni del moto partendo dalle 10).

11) $$M \ddot{\vec{r}}_b = M\vec{g} \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad \mu \ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}$$

r è , per definizione la distanza delle due particelle, -k**r** la forza di interazione tra le due particelle. Il moto conserva il momento angolare e quindi avviene su di un piano nel sistema baricentrale. Il moto nel laboratorio dovrà tener conto del moto accelerato baricentrale:

12)
$$\vec{r}_1 = \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \frac{m_2}{M}\vec{r}(t)$$
$$\vec{r}_2 = \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 - \frac{m_1}{M}\vec{r}(t)$$

l'equazione oraria di **r** è

$$\vec{r} = (A_x \sin(\omega t + \phi_x), A_y \sin(\omega t + \phi_y), A_z \sin(\omega t + \phi_z))$$

se r(t) descrive una circonferenza o un ellisse, nel laboratorio vedremo una sorta di spirale di passo crescente verso il basso (se g nella direzione di dell'asse z).