G.M.P. Corso di Laurea in Fisica Unipi

Pisa novembre 2011
Cap.17.v.11

Appunti di Fisica _I
Primo semestre

Forze centrali ed Il problema di Keplero

Table of Contents

Il problema dei due corpi

L'interazione tra due corpi (1 e 2) isolati è descritto da due forze applicate ai due corpi di pari intensità, con direzione individuata dalla congiungente dei due corpi e di senso opposto. Ricorda il terzo principio!
Le equazioni del moto sono

1) $$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \qquad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}$$

(vedi anche i capitoli 13,14,15)

Definiamo il *centro di massa* come la posizione media pesata con la massa dei corpi del sistema e la *massa ridotta* che è la metà della media "armonica" ed è definita come *l'inverso della media aritmetica degli inversi:*

1b) Centro di massa $\vec{R}_b = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ Massa ridotta $\mu = \dfrac{1}{\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}} = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Sommiamo le due equazioni di sopra ricordando che le due forze hanno la stessa intensità e direzione, ma sono di segno opposto:

2a) $$M\,\ddot{\vec{R}}_b = 0 \qquad con \quad M = m_1 + m_2$$

Facciamo la differenza tra le due equazioni dopo aver moltiplicato ambo i membri della prima per m_2 e della seconda per m_1:

2b) $$\mu\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21} \quad ponendo \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$
$$Ricorda$$
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

la prima equazione non la discuto poichè ne conosciamo bene il significato. Descrive il moto rettilineo uniforme a velocità $\mathbf{V_b}$ del centro di massa, come se tutta la massa del sistema fosse concentrata in R_b. La seconda può essere meglio riscritta ricordando che la forza che stiamo considerando è una forza di interazione tra le due particelle e che dipende essenzialmente da r

3) $$\mu\,\ddot{\vec{r}} = F(r)\frac{\vec{r}}{r} = F(r)\,\hat{r}$$

dove si mette in evidenza che la forza è diretta secondo **r**, la retta congiungente i due corpi, e che quindi è una forza centrale. Può essere per esempio, una forza elastica o una forza gravitazionale. L'equazione esprime un moto di una particella di massa ridotta m legata ad un centro fisso da una forza F(r); quindi ci siamo ridotti a studiare il moto di un corpo in un capo di forze centrali.

Ricordando quanto abbiamo già studiato per un moto in campo centrale, la 3) si riduce in coordinate polari sul piano (immaginato xy) su cui avviene il moto a due equazioni:

3a) $$1)\quad m\ddot{r} = F(r) + m r \dot{\phi}^2$$
$$2)\quad m r \ddot{\phi} = -2 m \dot{r} \dot{\phi} \quad ovvero \quad m\frac{1}{r}\frac{d\,r^2\dot{\phi}}{dt} = 0$$

dove ρ coincide con |r| e ϕ è l'angolo polare.

Ricavate le equazioni orarie in (r,ϕ) ritorneremo alle equazioni del moto di ogni particella sfruttando le relazioni iniziali delle equazioni 1, 2a, 2b, e riportate qui in formula:

$$\vec{R} \equiv (r\cos(\phi),\, r\sin(\phi),0)$$
$$\vec{r}_1 = \vec{R}_b + \frac{\mu}{m_1}\vec{r} \qquad \vec{v}_1 = \vec{V}_b + \frac{\mu}{m_1}\vec{v}_r$$
$$\vec{r}_2 = \vec{R}_b - \frac{\mu}{m_2}\vec{r} \qquad \vec{v}_2 = \vec{V}_b - \frac{\mu}{m_2}\vec{v}_r$$

In particolare nel caso della forza gravitazionale, se una massa è molto grande rispetto all'altra, come nel caso terra sole, la massa ridotta praticamente coincide con la massa della terra ed il baricentro con il centro del sole.

I potenziali

La forza gravitazionale o il suo potenziale si esprime come sappiamo:

5) $$F(r)\hat{r} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \qquad U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

e si scopre, come sapevamo, che il sistema ha una simmetria sferica (tutte le direzioni sono equivalenti) e pertanto si conserva il momento angolare totale. *Il moto allora avviene su di un piano.*

Nel caso di un campo elastico, non è realistico pensare a due masse così diverse come nel caso terra sole, tuttavia l'equazione del moto descrive un moto centrale che conserva ancora il momento angolare totale.

la forza $\mu\ddot{\vec{r}} = -K\vec{r}$ e il potenziale $F(r)\hat{r} = -k\vec{r} \qquad U(r) = \frac{1}{2}k r^2$

Sistema gravitazionale

Il sistema costituito da due masse in interazione gravitazionale classicamente fu studiato inizialmenmte da Keplero che osservando il moto degli astri dedusse alcune leggi che illustremo in seguito.

Metodo di soluzione con le costanti del moto e sistema ridotto

Energia totale e momento agolare: sono due costanti del moto che derivano rispettivamente la prima dal fatto che la forza è di tipo conservativa, cioè ammette un potenziale, la seconda dal fatto che il campo di forza è un campo centrale.

6) $$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GMm}{r}$$
$$\vec{L} = \vec{r}\times\mu\vec{v}$$

Il moto avviene, come abbiamo più volte detto, sul piano e pertanto possiamo usare un sistema di coordinate polari (r , ϕ) definite sul piano. Il momento angolare che è un vettore sempre perpendicolare al suddetto piano, ha il modulo individuato dalla velocità angolare di rotazione del mobile attorno al centro fisso.
(nota che nel caso terra-sole $\mu \cong$ m terra!)

Usando le coordinate sferiche possiamo eprimere sia l'energia totale (cinetica più potenziale) che il modulo del momento angolare. (dimostrare che l'energia cinetica si esprime in coordinate polari come nella formula di sotto)

7)
$$E=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2)-\frac{GMm}{r}$$
$$L=\mu r^2\dot{\phi}$$

Se L è costante possiamo eliminare dalla espressione della energia la variabile angolare sfruttando la seconda equazione.

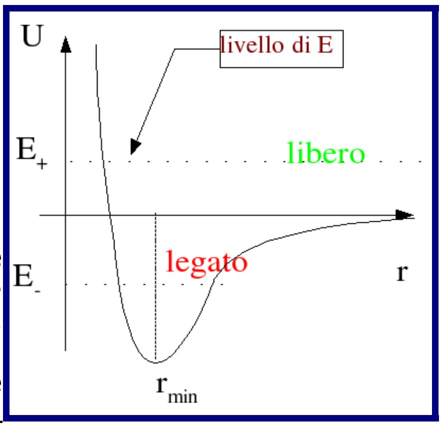
8)
$$\dot{\phi}=\frac{L}{\mu r^2}$$
$$E=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{L^2}{2\mu r^2}-\frac{GMm}{r}$$

L'energia si presenta con un termine cinetico, il primo, e due termini che dipendono dal raggio.
Provate a derivare dE/dt =0 e scoprirete la equazione del moto già trovata nei capitoli passati.!

Potenziale efficace e bariera centrifuga

Nalla definizione di energia totale appare adesso un termine cinetico legato alla raggio, e due altre funzioni dipendenti dalla distanza r dal centro che potremmo sommare in una unica funzione che chiameremo potenziale efficacie.

9)
$$E=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+U(r)_{eff.}$$
$$con \quad U(r)_{eff.}=\frac{L^2}{2\mu r^2}-\frac{GMm}{r}$$



Dove $U(r)_{eff.}$ è il *potenziale efficace* in cui si deve muovere la pallina di massa m! Il termine in cui appare il modulo quadro del momento angolare è chiamato, *bariera centrifuga*.
Il nome deriva dal fatto, come vedremo in seguito, che è *una bariera infinita* al moto verso il centro per L diversi da zero!.
Si riporti in un grafico U(r) in funzione r.
Nota: il moto può avvenire solo dove *la differenza tra l 'energia totale e l'energia potenziale è positiva, cioè dove l'energia cinetica è maggiore di zero*... altrimenti avremmo valori della velocità radiale immaginari!

Sia L nullo

Se L è nullo il potenziale efficace coincide con il potenziale gravitazionale che è una iperbole che tende a -∞ per r tendente a zero e si annulla per r verso ∞ . In questo caso ogni particella con energia finita lontana dal centro, viene comunque attratta verso il centro in un moto puramente radiale (rettilineo) acquistando una energia praticamente infinita. Potremmo dire che la particella cade nel centro, tuttavia fisicamente il problema è di difficile interpretazione perchè non sappiamo che cosa accade esattamente nel centro!

Consideriamo il caso *in cui L è maggiore di zero*.

U va all' ∞ per r tendente a zero, al crescere di r , U diventa negativo, ha un minimo e poi sale di nuovo per annullarsi per r tendente ad -∞ senza mai superare l'asse delle r.
Esiste un minimo del potenziale efficace per r= L^2/GMm^2 con $U_{eff.} = -G^2M^2m^3/2L^2$.
Fissato un valore della energia, maggiore del minimo, esistono due soluzioni di r per equazione E=U(r) se l'energia è minore di zero, mentre esiste una sola soluzione per E maggiore di zero.
Nel primo caso il moto avviene sul piano, all'interno della corona circolare tra r_{min} e r_{max} , cioè il moto oscilla tra i due valori di r indicati. In generale, cioè per campi non gravitazionali, se dopo n oscillazioni il moto si ripete, siamo nel caso di un moto chiuso, altrimenti il moto è aperto e pur essendo confinato non si ripete mai.
Nota nel caso del campo gravitazionale il moto è sempre chiuso dopo una completa oscillazione.
Se l'energia coincide con l'energia minima, si capisce dalla definizione di E che l'energia cinetica radiale è nulla, ovvero il raggio resta costante. La velocità radiale tuttavia deve essere diversa da zero e costante per giustificare un momento angolare che si conserva, mentre il mobile descrive una orbita circolare. Dalla

10) $$L=\mu r^2\dot{\phi} \quad con \quad r_{min}=\frac{L^2}{GMm\mu} \quad segue \quad \dot{\phi}=\frac{G^2M^2m^2\mu}{L^3}$$

ricavo la velocità angolare con cui il mobile descrive la sua orbita circolare.

Nel caso che l'energia iniziale sia maggiore di zero, il moto è limitato solo verso gli r piccoli, mentre può allontanarsi indefinitivamente dal centro.

Il moto nel caso che sia limitato (*o stato legato* come si dice in termine più tecnico) vedremo che ha una *forma ellittica* ed è chiuso dopo una oscillazione; nel caso che non sia limitato (detto anche *stato libero*), il moto descrive in genere *una iperbole* che passa vicino al centro delle forze, ad una distanza minima definita da r_{min} .

La traiettoria

Partendo dalla E come integrale primo del moto, derivando rispetto a t si ottiene:

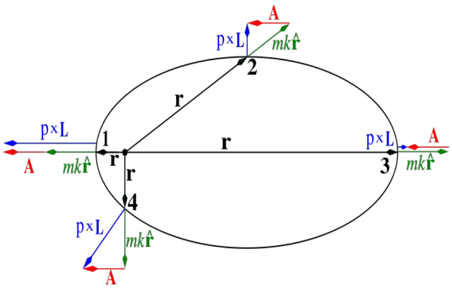
11)
$$\frac{dE}{dt}=\frac{d\left(\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{L^2}{2\mu r^2}-\frac{GMm}{r}\right)}{dt}=0$$
$$da\,cui$$
$$\mu\ddot{r}=\frac{L^2}{\mu r^3}-\frac{GMm}{r^2}$$

che certamente non appare di facile soluzione.

Vettore di Lenz

Fortunatamente si può usare un'altra strada che ci illumina sulla forma della traiettoria. Esiste una nuova costante del moto che vale solo nel caso dei moti kepleriani (cioè con forze di tipo graviatzionali); questa costante si chiama vettore di **Laplace–Runge–Lenz** brevemente detto di Lenz ed è così definito:

12) $$\vec{A}=\vec{v}\times\vec{L}-GMm\,\hat{r}$$



Derivando per t si scopre che il secondo membro è identicamente nullo, quindi **A** si conserva!
A è un vettore sul piano del moto, come si vede dalla sua definizione è perpendicolare ad **L** ed ha sempre lo stesso valore ovunque lo si calcoli lungo la traiettoria ed ha sempre la direzione dell'asse maggiore.

Nella meccanica, le grandezze conservate in generale come abbiamo già imparato, corrispondono ad una qualche simmetria del sistema. La conservazione del vettore di Lenz corrisponde ad un'insolita simmetria; *Kepler:* il problema è matematicamente equivalente ad una particella libera di muoversi su una *sfera di quattro dimensioni* dove il problema è perfettamente simmetrico per *rotazioni quadrimensionali.......* Questa maggiore simmetria produce la conservazione del vettore di Lenz!
Comunque assumiamolo come punto di partenza, o come un buon integrale primo che ci permette di calcolare l'orbita della traiettoria.

Consideriamo la posizione costante di **A** come la direzione dell'asse x, quindi come l' origine dell' angolo polare ϕ .
Facciamo un semplice conto (si fa per dire !) moltiplicando scalarmente ambo i mebri della 12) per **r.** Si ottine la traiettoria del moto in coordinati polari:

13)
$$\vec{A}\cdot\vec{r}=A\,r\cos\phi=\vec{r}\cdot\vec{v}\times\vec{L}-GMm\,r=\frac{L^2}{\mu}-GMmr$$
$$r=\frac{\frac{L^2}{\mu}}{GMm+A\cos\phi}\equiv\frac{p}{1+e\cos\phi}$$
$$p=\frac{L^2}{GMm^2}\qquad e\equiv\frac{A}{GMm}\qquad con\,\mu\equiv m\;per\,terra-sole$$

Definisco: *p = parametro ed e = eccentricità.*

Intanto si vede che r va a ∞ per se e>1, mentre il moto rimane limitato se e<0. Caso limite per e=0 r è costante, ovvero *orbita circolare.*
Se si passa a cordinate cartesiane dalla 13)

14)
$$r=\frac{p}{1+e\cos\phi}\qquad r+er\cos\phi=p\qquad r=p-ex$$
$$x^2+y^2=(p-ex)^2\quad segue\quad(1-e^2)x^2+y^2+2\text{pex}=p^2$$

si scopre l'equazione di una conica che con un pò di algebra possiamo scrivere in forma canonica

15)
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$
$$a=\frac{p}{1-e^2}\qquad b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}\qquad x_0=\frac{ep}{1-e^2}\qquad y_0=0$$

che è una ellisse per e < 1, mentre è una una iperbole per e >1. Il caso e=0 corrisponde ovviamente ad una circonferenza.

I parametri Fisici

Sappiamo che l'orbita è una conica che sta su di un piano, calcoliamo tutti I parametri fisici più importanti.
La conica la pensiamo riferita ad uno dei fuochi, da cui parte il raggi **r** che congiunge il corpo che orbita nello spazio. Il raggio **r** è definito da un modulo "r" ed un angolo θ misurato a partire dall' asse individuato dal vettore di Lenz.

Sul grafico (E,r) riportiamo il potenziale efficace. Notiamo immediatamente che per energie minori di zero ed un dato L, le rette orizzontali a energia costante o non incontrano per nulla la curva U_{eff} oppure al di sopra del minimo la incontrano in due

punti che corrispondono a due valori del r: r_{min} e r_{max}. Il moto è limitato nello spazio e corrisponde ad una ellisse.
Calcoliamo , in quetta zona , per E<0, i valori dei raggi sfruttando la conservazione dell' energia.

$$E=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{L^2}{2\mu r^2}-\frac{GMm}{r} \quad \text{che risolvo per } \dot{r}=0 \quad \text{segue}$$

$$r^2+\frac{\alpha}{E}r-\frac{L^2}{2\mu E}=0 \quad \text{da cui due tipiche soluzioni}$$

$$r_{max}=-\frac{\alpha}{2E}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2}+\frac{L^2}{2\mu E}}=\frac{\alpha}{2|E|}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2}-\frac{L^2}{2\mu|E|}}$$

$$r_{min}=-\frac{\alpha}{2E}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2}+\frac{L^2}{2\mu E}}=\frac{\alpha}{2|E|}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2}-\frac{L^2}{2\mu|E|}}$$

Ricordando che l'asse maggiore dell'ellisse è 2a= r_{max} + r_{max} , il fuoco dista dal centro dell'ellise
F= (r_{max} - r_{min})/2 e che l' asse minore , per definizione dell'ellisse, è
b= sqrt(a^2 -F^2) = sqrt((r_{max} + r_{min})^2/4- (r_{max} - r_{min})^2/4) = sqrt((r_{max} x r_{min})/2)
si trovano le seguenti relazioni:

$$a=\frac{r_{max}+r_{min}}{2}=\frac{\alpha}{2|E|}=\frac{GmM}{2|E|}$$

$$b=\sqrt{\frac{L^2}{2\mu|E|}}$$

$$F=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2}-\frac{L^2}{2\mu|E|}}$$

l 'eccentricità

$$e=\frac{F}{a}=\sqrt{1-\frac{2|E|L^2}{\mu\alpha^2}}$$

Ricordando i semiassi in funzione dei parametri si hanno le seguenti ovvie relazioni che legano I parametri geometrici a quelli fisici:

16)
$$a = \frac{p}{1-e^2} \equiv \frac{GMm}{2|E|}$$
$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = a\sqrt{1-e^2} \equiv \sqrt{\frac{L^2}{2\mu|E|}}$$

Il semiasse maggiore e' determinato dalla sola energia , mentre b dipende a parita' di energia dal modulo del momento angolare e coincide con a solo quando l'eccentricita' e' nulla (o il momento angolare e' massimo a parita' di energia);

Problema
Discutere il moto nel caso di E=0 e E>0:

La velocità areolare

Purtroppo non è possibile ricavare l'equazionbe oraria, ma nel caso delle orbite ellittiche sfruttando la costanza della velocità aereolare abbiamo una relazione per scoprire il periodo del moto dato che conosciamo l'area dell'orbita A=πab:

17)
$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu} = costante \qquad T = 2\pi\, ab\, \frac{\mu}{L}$$

e dopo un po di algebra usando le definizioni di sopra

18)
$$T = 2\pi\, ab\, \frac{\mu}{L} = 2\frac{\pi}{\sqrt{GM}} a^{\frac{3}{2}}$$

e così troviamo la III legge di Keplero!. *Il periodo è proporzionale alla radice quadrata del cubo dell'asse maggiore.*

Oscillatore armonico

In questo caso se partiamo dal potenziale efficace

19)
$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r)_{eff.}$$
$$con \qquad U(r)_{eff.} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + kr^2$$

il diagramma di U in funzione di r presenta ancora un minimo ($U_{min}=\omega L$) , ma il potenziale va a ∞ sia per r verso 0 che verso $+\infty$. Questo indica solo che *non ci sono stati liberi*, ma come abbiamo già visto in altre occasioni ci sono solo stati legati con forma ellittica e sempre chiusa; attenzione dopo due oscillazioni!.

Qui non vale il vettore di Lenz poichè la forza non è del tipo newtoniana!