Pisa novembre 2011
Cap.16 v.11

Appunti di Fisica _I
Primo semestre

Potenziale

Sommario

Cosa è il potenziale

Sappiamo già più cose sull'energia potenziale:

è una energia dovuta alla posizione poichè dipende essenzialmente dal punto dove il mobile si trova. Un mobile su di una collina ha una energia potenziale maggiore di quello a valle. Questo infatti se lasciato libero, trasformerà tutta la sua energia potenziale in energia cinetica scendendo giù e arrivando a valle con una bella velocità , mentre un mobile fermo a valle, anche lasciato libero, non acquisterà energia cinetica spontaneamente!.
In verità quello che si trasforma in energia cinetica non è la quantità assoluta di energia potenziale indicata dalla funzione U sulla sommità della collina, ma la differenza tra i due valori che la funzione potenziale assume sulla cima della collina e il valore di U in fondo alla valle.
Immaginate una infinità di cartellini associati ai punti dello spazio in cui avviene il moto con su scritti i valori che assume il potenziale nel punto corrispondente. Per sapere quanta sarà l'energia cinetica che acquisterà un punto che scende dalla cima al fondo valle, basta confrontare il cartellino di cima con quello di fondo valle e farne una semplice differenza per ricavarne il numero cercato. La procedura vale naturalmente anche per porzioni intermedie del percorso.
In generale il potenziale comunque non dipende dalla posizione assoluta nello spazio, ma piuttosto dalla posizione relativa rispetto ad un punto di riferimento, che del resto può essere arbitrario. Un grave su di un tavolo ha una certa energia potenziale riferita al pavimento della stanza, ma avrebbe assunto un valore diverso se avessimo usato come punto di riferimento il soffitto della stanza stessa!

Superfici di livello e equipotenziali

Ricordate una carta geografica fisica. In essa sono riportate le cuve di livello, quelle curve che collegano i punti che lungo il crinale di un monte sono alla stessa altezza h, rispetto al livello del mare. Il valore che distingue una curva, è proporzionale (mgh) anche al valore che assume il potenziale negli stessi punti. Quelle curve in effetti collegano punti che hanno lo stesso potenziale e possiamo chiamarle *curve equipotenziali*.

Ma nello spazio è meglio parlare di "superfici" equipotenziali. In effetti una curva di livello appartiene ad uno piano orizzontale che ha una data altezza h e che taglia la montagna propio nella curva di livello. Se si potesse vedere la carta geografica in tre dismensioni ci apparirebbe immediato il concetto su esposto. Si noterebbe la montagna tagliata a fette (in realtà le "fette" sarebbero delimitate da porzioni di superfici sferiche assimilazili a superfici piane!

Se le curve di livello sono state disegnate con passi in altezza fissi, diciamo di Δh, i piani saranno regolarmente distanziati giusto di Δh. Il lavoro per passare da un livello a quello superiore, indipendentemente dal cammino lungo il monte, è giusto mgΔh. questo lavoro diviso per Δh dà evidentemente la forza peso ben nota che dobbbiamo sollevare!
Le curve di livello, quelle geografiche, non appaiono regolarmente spaziate sulla carta poichè il monte può essere più o meno ripido. Nelle zone molto pendenti le curve si susseguono fitte, nelle regioni quasi pianeggianti sono rade, quasi inesistenti.
Anzi il rapporto tra il dislivello individuato dalle due curve e la distanza tra le due curve misurata sulla carta, lungo una data direzione, dà la tangente dell'angolo di pendenza in quella direzione.

C'e una relazione grafica tra le forze e le curve equipotenziali?

Un campo di forze può essere visualizzato disegnando, nello spazio in cui è definito il campo, curve che sono tangenti alla direzione della forza con una densità in ogni punto che è proporzionale alla intensità della forza nel punto stesso.
Ricordate un esperimento casalingo che si può facilmente fare con un po di limatura di ferro ed una calamita?
Le curve, dette linee di forza, sono visualizzate dalla limatura di ferro appena viene disposta su di un piano appoggiato su i due poli di un magnete. Sono curve che vanno da un polo all'altro, più fitte tra i due poli, sempre più rade verso l'esterno.

Una caratteristica importante delle superfici equipotenziale è che *in ogni punto esse sono perpendicolari alla forza in quel punto.* Come dimostrarlo?
Prendiamo due punti vicinissimi giacenti sulla stessa superfice equipotenziale, allora il lavoro fatto dalle forze del campo per spostarsi dal primo al secondo punto è :

$$\vec{F}\cdot\Delta\vec{s}=U(\vec{P})-U(\vec{P}+\Delta\vec{s})$$

che è nullo per definizione di superfice equipotenziale. Ne segue che se *il prodotto scalare è nullo gli spostamenti sulla superficie sono perpendicolari alla direzione della forza. CVD*

Nota: Dalla equazione 16.17) per il gradiente si scopre che il gradiente di una funzione g(**p**) è un vettore perpendicolare alla superficie individuata da g(**p**)=k.

Graficamente le curve equipotenziali sono quindi perpendicolari alle *linee di forza* e in un disegno bidimensionale formeranno con queste un reticolato di linee che si intersecano a novanta gradi. Attenzione la rappresentazione bidimensionale si riferisce solo ad un campo di forze definite su di un piano x,y, qui le curve equipotenziali non corrispondono alle curve di livello geografiche.
Le forze definite nello spazio hanno le *linee di forza* che vanno viste nello spazio, cosi' come le superfici equipotenziali sono nello spazio. Dobbiamo immaginarci le linee di forza

attraversare perpendicolarmente le superfici equipotenziali che si susseguono più o meno spaziate.
La spaziatura delle superfici, in un dato punto, dipende dalla intensità delle forze; sono più distanti dove le forze sono meno intense e più fitte dove le forze sono più intense. In particolare, là dove la spaziatura è costante, le forze sono pure costanti.
Del resto in prima approssimazione si può calcolare la forza in una certa direzione con una semplice procedura: si prendendo due punti che stanno su due superfici contigue e che appartengono alla retta di direzione fissata; si misura la distana dei punti lungo la retta e si calcola il rapporto tra la differenza del potenziale nei due punti e la distanza dei punti. In soldoni stiamo solo calcolando il gradiente lungo la direzione fissata che al limite per distanza dei punti tendente a zero è la componente della forza nella direzione indicata dalla retta congiungente i due punti.

Il potenziale nel campo terrestre

Immaginamo di disegnare le linee di forza che descrivono il campo terrestre a grande distanza dal centro (voglio dire immaginiamo per il momento che tutta la terra sia concentrata nel centro!). Queste sono dirette ovviamente come i raggi e si allontanano indefinitivamente verso l'infinito. Partiamo con un buon numero di raggi che puntano nelle varie direzioni dello spazio, ma che siano distribuiti isotropicamente... come dire che la superfice di una sfera di raggio r=1 (unità arbitraria) viene attraversata da questi raggi che praticano su di essa tanti buchetti distribuiti con densità costante per unità di superfice. (densità = n buchetti/$2\pi r^2$)
Si capisce immediatamente che gli stessi raggi quando attraversano una superfice sferica a distanza 10 (cioè raggio r=10 nelle stesse unità arbitrarie di prima) la densità dei buchetti sulla superfice della sfera diminuisce di un fattore 100 e questo semplicemente per il fatto che la superfice è aumentata di un fattore cento, mentre le linee di forza sono rimaste quelle di prima! Questo ci dice fra l'altro che, se la forza è proporzionale alla densità delle linee di forza in un punto, allora secondo il nostro schemetto, la intensità della forza diminuice con il quadrato della distanza dal centro. É quello che accade proprio anche per la forza gravitazionale!

1) $$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$

Le superfici equipotenziali, corrispondenti al campo di forze su disegnato, dato che devono essere perpendicolari in ogni punto alla direzione delle forze, possono essere solo superfici sferiche concentriche intorno al punto da cui escono le forze. Una funzione che dipende dal modulo di r è una funzione il cui valore è costante su di una superfice sferica!

Dalle nostre definizioni di prima sappiamo che la derivata della funzione potenziale U nella direzione di r deve restituirci il valore cambiato di segno della componente della forza propio lungo il raggio. Quindi dalla definizione $F_r \approx -\frac{1}{r^2} = -\frac{dU(r)}{dr}$ si ricava che la funzione U(r) è una funzione la cui derivata rispetto ad r deve essere propio $1/r^2$, cioè

$U(r)\ \alpha\ -1/r$ + costante.

Tenedo conto della 1) che fissa anche il coefficiente di proporzionalità abbiamo

2) $$U(r) = -G\frac{Mm}{r} + U_0$$

che descrive il potenziale del campo gravitazionale all'esterno della superficie terrestre. Se poniamo la costante a zero il potenziale si limita al primo termine e si legge *come "meno" il lavoro che fanno le forze del campo quando una massa m si muove dall'infinito ad una distanza r dal centro.*

Notare che nei campi di forza elettrici dove la forza è diretta lungo il raggio ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza, il poteziale è simile in forma a quello gravitazionale purchè, nel definire il segno del potenziale, si tenga conto del fatto che due cariche dello stesso segno si respingono, mentre quelle di segno diverse si attraggono.

Il poteziale per le forze elastiche

La forza elastica unidimensionale è descritta in genera dalla forma classica $f=-k(x-x_0)$ che banalmente ammette come potenziale una forma quadratica di x $U=½\ k\ (x-x_0)^2$ + cost.

Se immaginiamo di riferirci sempre rispetto al punto di riposo $x=x_0$ definiamo la forma breve del potenziale $U=½\ k(x-x_0)^2$ con la costante nulla.

Nel caso di una forza elastica tridimensionale del tipo **F**= -k**r** sappiamo bene che il moto avviene indipendentemente sui tre assi poichè la forza vettoriale di sopra può essere considerata come la somma di tre forze indipendenti dirette secondo i tre assi x,y,z.

Il lavoro fatto dalle forze del campo è la somma, come sappiamo, dei lavori fatti da ciascuna delle tre forze e pertanto la funzione Potenziale è la somma di tre contributi, cioe:

3) $$U(x,y,z) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}kz^2 = \frac{1}{2}kr^2$$

ancora un potenziale che dipende solo dal modulo r (in particolare dal quadrato di r), quindi è evidente la simmetria sferica del problema. Si mostra facilmente che il gradiente della U rende esattamente la forza elastica aspettata!

Notare

Le superfici equipotenziali sono ancora delle superfici sferiche che si addensano in realtà all'infinito! Il contrario di quanto avviene nel caso delle forze del tipo gravitazionali. Le linee di forza sono dirette verso il centro come prima, ma aumentano in densità a mano, a mano che ci si allontana dal centro delle forze! Nel caso del campo gravitazionale o elettrico, le forze sembrano emergere dal punto centrale in cui si trova la massa o la carica, *qui sembrano nascere nello spazio!*. Se ci si pensa su e ci domandiamo quante devono essere le di linee di forza che escono da un volume sferico di raggio r affinchè la loro densità per unità di superficie sia proporzionale ad r come vuole la forza elastica, si scopre che se la densità superficiale deve essere proporzionale ad r

$$\rho = \frac{N}{4\pi r^2} \approx kr \quad segue \quad N \approx 4\pi r^3 \approx Volum\epsilon$$

allora il numero N di linee di forza uscenti dal volume di raggio r sono proporzinali al volume della sfera. Raddoppiando il raggio il numero di linee di forza aumentano di un fattore $2^3 = 8$!

Piu avanti ci capiterà di studiare un caso in cui ci ricorderemo di quanto detto.