Pisa Novembre 2011
Cap.15.v.11

Appunti di Fisica _I

Primo semestre

Meccanica

Moto in campo centrale

Sommario

Forza Centrale

Un "campo"[1] di forze in cui la forza in ogni punto **P** dello spazio è sempre diretta verso un centro fisso **O** ed ha il modulo dipendente solo dalla distanza da **O**, come descritto da seguente modello:

1) $\vec{F}(\vec{R}) = f(r)\hat{R}$ Con **R** = **P-O** e r = **|P-O|**

è detto *campo centrale* o *campo di forza centrale*.
Forze di questo tipo sono per esempio la forza elastica tridimensionale prima discussa o la forza gravitazionale e quella elettrica che studieremo piu' avanti. Tutte queste forze hanno in comune la *simmetria*[2] *sferica*. Una simmetria che ricorda una sfera. Non c'è, in una sfera, una direzione privilegiata così come la potremmo individuare invece in un cono o in un cilindro. D'altra parte un oggetto a simmetria sferica potremmo ruotarlo attorno ad un qualsiasi asse passante per il suo centro senza notare di fatto alcun cambiamento. Nel nostro caso la forza dipende solo dalla distanza assoluta del punto **P** di applicazione dal centro e giace sempre sul raggio che unisce **P** con il centro.

[1] Un **campo di forza** è un "campo vettoriale", ovvero l'associazione di un vettore **F**(*P*) ad ogni punto *P* dello spazio.

[2] Un sistema è simmetrico rispetto ad una trasformazione se una volta sottoposto a quella trasformazione, resta identico a se stesso. In particolare una sferica perfetta, una volta ruotata attorno ad un asse che passa per il centro sfera, di un angolo θ, appare ancora identica a prima. Dato che l'angolo di rotazione può essere arbitario, si dice che la simmetria è *continua*, invece nel caso di un cubo dove solo le rotazioni di 90 gradi attorno ad uno degli assi verticali alle superfici laterali riporta il cubo in una posizione identica a quella iniziale, si parla di simmetria *discreta*.

Calcoliamo un grandezza che si rivelerà di importanza fondamentale nel seguito e cioè il *momento della forza* , **M,** rispetto al centro O fisso secondo la seguente definizione:

2) $$\vec{M}_O = \vec{R}_O \wedge \vec{F} = r\, f \sin\theta\, \hat{n}$$ come prodotto vettoriale di **R** e **F**

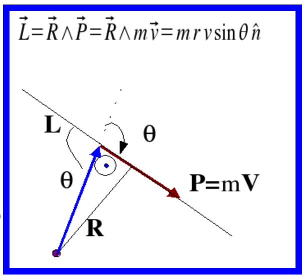
r e f sono i moduli dei rispettivi vettori , θ è l'angolo tra i due vettori e **n** è il versore normale al piano individuato dai vettori **R** e **F**; la direzione positiva di **n** è tale che guardando dalla punta di **n** i vettori di partenza , si vede che **R** deve ruotare in senso antiorario per sovrapporsi su **F**, naturalmente percorrendo l'angolo minore.

Nota:
Si può usare anche la regola della mano destra: *Si punta la mano nella direzione e senso di **R**, poi si chiudono un pò le dita nella direzione di **F**, se non è possibile si ruoterà il polso opportunamente, quindi la direzione e il senso del pollice ci indicherà la direzione e il senso **n.***
Dalla 2) si nota che il *momento* si può interpretare come il prodotto della distanza r per il modulo della forza perpendicolare ad **R**, oppure come il modulo della forza per la distanza della retta su cui giace la "forza" dal punto centrale di riferimento. In questo ultimo caso la distanza prende il nome di *braccio della forza*.
Quindi forze di pari intensità e direzione, poste a distanze maggiori dal punto O, danno un valore del momento crescente con la distanza da O. Forze che fanno un angolo nullo o di p rispetto alla direzione di R hanno momento nullo. [le dimensiioni di M ≡ N.m.s ≡ J.s]

Conservazione del momento angolare

In genere il momento dalla forza può essere calcolato ripetto ad un qualsiasi punto dello spazio, ma nel nostro esempio di forze centrali, ha senso calcolarlo rispetto al punto O coincidente con il centro stesso delle forze. Dalla 2) si scopre che in qualsiasi punto il momento è nullo poichè l'angolo tra la direzione della forza ed il raggio è sempre zero o π.
D'altra parte calcoliamo il *momento della quantità di moto,* **L** *o* meglio chiamato come *momento angolare***,** rispetto allo stesso punto O :

3) $$\vec{L}_O = \vec{R}_O \wedge m\vec{v} = m r\, v \sin\theta\, \hat{n}$$



dove θ è l'angolo tra i due vettori, **n** è adesso perpendicolare al piano individuato dal raggio e dal vettore velocità, con il senso individuato dalla regola della mano destra.
Ora deriviamo la 3)

4)

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{R}_O}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{R}_O \wedge \frac{d\,m\vec{v}}{dt}$$

poiche' la derivata di $\vec{R}_0$ e' la velovita $\vec{v}$,

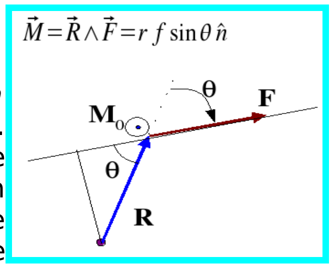
il primo termine del secondo membro e' ***nullo***

La derivata della quantita' di moto nell'ultimo termine

si sostituisce con la forza corrispondente $(\vec{F} = m\vec{a})$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{R}_O \wedge \vec{F} = \vec{M}_O$$

La realazione è del tutto generale!



Ora nel caso di *forze centrali ricordo che il momento della forza è sempre nullo* in qualsiasi punto dello spazio si trovi il mobile. La matematica insegna che la derivata di una costante è nulla e quindi *il momento* ***L*** *è un vettore costante*: è constante in modulo ma anche in direzione e senso. Poichè **L** è un vettore che ha tre componenti e le sue componenti sono tutte e tre costanti, ovvero **L**, nel c,aso di un moto in campo centrale è *una costante del moto*[1]. Possiamo quindi dire che nel caso di un moto in forze centrale , si *conserva il momento angolare*.

Possiamo immediatamente tarrne vari ed utili conseguenze:

- La direzione di **L** costante implica che *il moto è piano,* cioè avviene sempre sullo stesso piano. Infatti fissate le condizioni iniziali di **R** e m**v** individuano un piano a cui **L** è perpendicolare e pertanto se **L** è fisso anche il piano resta fisso per tutta la durata del moto.

- Il senso di **L** costante implica che il moto avviene sempre nello *stesso senso, orario o antiorario.*

- *La velocità aereolare è costante (detta anche II legge di Keplero).* Ci mettiamo sul piano del moto e scriviamo l'intensità del vettore momento angolare usando come coordinate le coordinate polari su detto piano. Partendo dalla seconda espressione delle 3) e ricordando che v sin(θ) = r dϕ/dt è la velocità perpendicolare ad **R** per definizione di prodotto vettore, segue guardando ad un disegno:

5) $$Vel.areolare = lim_{\Delta T\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = lim_{\Delta T\to 0}\frac{r^2}{2}\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{r^2}{2}\dot{\phi} = \frac{r}{2}v\sin\theta = \frac{L}{2\mathrm{m}}$$ C.V.D.

[1] è la terza costante del moto che incontriamo. La prima è la *quantità di moto* che resta costante quando un mobile si muove in uno spazio omegeneo, la seconda è *l'energia* che resta costante quando le forze in gioco non dipendono esplicitamente dal tempo e adesso è il *momento angolare* che è costante se le forze applicate al sistema sono isotrope (non hanno una direzion e privilegiata). Non è una semplice coincidenza, anzi esiste un teorema, detto teorema di Noether, che stabilisce uno stretto legame tra i parametri delle simmetrie di un sistema e le sue costanti del moto.
È anche interessante notare che il prodotto dimensionale tra le variabili coniugate in ciascuna simmetria su menzionata, come la quantità di moto e lo spazio di traslazione , l'energia e il tempo, il momento angolare e l'angolo di rotazione, ha sempre le dimensioni di una *energia per secondo* (definita anche come l'*azione*).

Ancora sull'oscillatore isotropo (ricorda)

Ricordo l'equazione 12 dell'oscillatore: **F** =- k**r .**
Questa è un campo di forze centrali e quindi mi aspetto che valga la conservazione del momento angolare con tutte le sue conseguenze.
Il moto allora avviene su di un piano passante per il centro delle forze: fissate le condizioni iniziali, resta fissato il piano.
A questo punto è inutile lavorare in coordinate tridimensionali se tutto avviene su di un piano. Su questo piano, vista anche la simmetria cilindrica, immaginiamo un sistema di coordinate polari (vedi 12.16):
Per scrivere immediatamente le equazioni senza ripetere il conto del capitolo 11), immaginiamo di essere su di un sistema con origine in O, ma ruotante con la stessa velocità angolare dell'oscillatore, cioè ω=dϕ/dt . In questo sistema l'oscillatore si muove sempre lungo lo stesso asse di riferimento ed è sottoposto ad una forza apparente *centrifuga* pari a $m\rho\omega^2$ diretta secondo l'asse **r,** cioè secondo il raggio, e ad una forza di Coriolis $-2mv_\rho\omega$, sempre apparente, diretta in ogni istante secondo l'altro asse, cioè secondo la perpendicolare ad **r**.
Quindi posso scrivere immediatamente le due equazioni nel sistema ruotante:

6) $$\begin{aligned} m\ddot{\rho} &= -k\,\rho + m\,\rho\,\dot{\phi}^2 \qquad \textit{parallelo al raggio} \quad \vec{r} \\ m\,\rho\,\ddot{\phi} &= -2\mathrm{m}\,\dot{\rho}\,\dot{\phi} \qquad \textit{perpendicolare al raggio} \end{aligned}$$

La seconda equazione, quella che descrive la variazione della velocità tangenziale, si si può sostituire, (vedi le lezioni passate) dalla equazione che indica *esplicitamente la costanza del momento angolare.*

$$L = m\,\rho^2\,\dot{\phi}$$

Con una semplice sostituzione arriviamo immediatamente alla relazione (11.19) qui riportata:

7) $$m\,\ddot{\rho} = -k\,\rho + \frac{L^2}{m\,\rho^3}$$

è la realazione da cui possiamo ricavare l'equazione oraria di r. L'integrale non è ancora abbordabile, vedremo piu' avanti.!!!

Costante del moto

Il momento angolare è una grandezza che dipende generalmente dal tempo. Si pensi ad una particella che si muove lungo un traiettoria rettilinea che passa ad una distanza d da un punto fisso O nello spazio di riferimento. È possibile valutare il momento della quantità di moto del nostro mobile rispetto al punto indicato. Immaginiamo che il mobili si trovi in **P** all'istante t, con una velocità **v** lungo la traiettoria indicata. Definiamo il momento

8) $\vec{L}=\vec{OP}\wedge m\vec{v} \quad il\, cui\, modulo\, vale \quad L=dmv$

se d, la distanza del polo O dalla retta è diversa da zero (ovvero la traiettoria non passa per O) l'intensità del momento angolare dipende dal valore istantaneo della velocità che varia se viene accelerato da una causa esterna.
Nel caso di un campo centrale il moto non è certo rettilineo, tuttavia ha la peculiarità che il momento angolare resta costante.
Diremo che nel caso di forze centrali (o a simmetria sferica) il momento angolare **L** è *una costante del moto.*

Ancora sulle costanti del moto

Conosciamo già un'altro caso di costante del moto.
Partiamo dalla equazione generale **F**=m**a**, e supponiamo che le forze siano esattamente nulle. La quantità di moto già a suo tempo definita come **p**=m**v** è una *costante del moto* propio poichè la sua derivata m**a** è nulla.
Immediatamente si nota che la velocità stessa, a meno che la massa non vari nel tempo, è costante, in intensità, direzione e senso. Quindi il moto è rettilineo uniforme.

Sembra quasi che si sia ritrovato il primo principio di inerzia e sembrerebbe che quello sia ' contenuto nel secondo. Purtroppo senza il primo principio non avremmo potuto definire i sistemi inerziali in modo indipendente dalle forze!

Ora possiamo invece riconoscere che un sistema inerziale è quello in cui *vale il secondo principio della dinamica.*
Il secondo principio infatti parla solo di forze e di derivate seconde dello spazio. Le forze sono le stesse in ogni sistema di riferimento inerziale, le accelerazioni sono le stesse indipendentemente dalla velocità di traslazione rispetto ad un qualsiasi altro sistema inerziale preso per riferimento base (ricorda la derivata seconda annulla i contributi delle velocità costanti!): dunque le equazioni del moto saranno scritte formalmente nello stesso modo. Solo le condizioni iniziali sembreranno diverse ai due osservatori in due sistemi inerziali diversi.

C'è di piu!

L'equazione vettoriale del moto corrisponde in effetti a tre equazioni, una per ogni asse di riferimento (se parliamo di sistema di coordinate cartesiane).

9) $$F_x=\dot{p}_x \qquad F_y=\dot{p}_y \qquad F_z=\dot{p}_z$$

se immaginiamo che la componente x della forza sia sempre nulla, allora la componente x della quantità di moto sarà costante e che in definitiva il mobile se ha massa fissa, si muoverà con velocità costante sull'asse x. Certo se poi pensiamo nulla anche la componente y, si ha la stessa conclusione per il momento lungo y. Si resta solo con la forza z che accelererà il moto come deve, ma lungo z. Il moto è la composizione di un moto verticale piu' quello rettilineo a velocità uniforme (o fermo) sul piano. Ricorda la caduta o il moto parabolico dei gravi!?

Qualche discussione sulle simmetrie

Quindi anche qui c'e una costante del moto (anzi tre possibili costanti indipendenti) che sono legate di nuovo ad una caratteristica importante dello spazio in cui il moto avviene.
Se nello spazio non ci sono forze, ogni punto equivale all'altro ed un qualsiasi spostamento del mobile non cambia di fatto nulla, (come accade nello spazio intergalattico!). Se nello spazio c'è invece una forza di campo costante allora solo lo spostamento del punto perpendicolarmente alla direzione della forza non cambia nulla nel moto del nostro mobile!
Diremo nel primo caso che *c'è simmetria per spostamento in ogni direzione* e che questo implica una *conservazione della quantità di moto totale*, nel secondo caso che c'è simmetria per spostamenti solo in direzioni perpendicolari alla forza e pertanto solo *le componenti della quantità di moto perpendicolari alla forza si conservono.*

Possiamo enunciare anche così l'invarianza per traslazioni: due fisici che fanno esperimenti sulla gravità in laboratori separati orizzontalmente otterranno gli stessi risultati. Tutto questo propio perchè la forza dipende solo dalla coordinata verticale mentre nulla cambia orizzontalmente muovendosi da un laboratorio all'altro!

Momento angolare assiale

Nota nel caso del momento angolare abbiamo tirato in ballo la simmetria sferica dicendo che il sistema delle forze centrali non ammette una direzione privilegiata, ovvero che una rotazione del mobile attorno ad un asse passante per il centro delle forze non cambia nulla sul moto. *Allora si conserva il momento angolare!*
Nel caso di una forza costante come per esempio la forza di gravità, resta individuato un asse privilegiato, quello verticale parallelo a g. Attorno a questa direzione c'è una simmetria cilindrica di rotazione .....che ci sia un pezzo di momento angolare che si conserva?. Si ! .... il momento angolare proiettato sull'asse verticale di simmetria; *momento assiale.* Pensateci un pò!

$$calcola \quad \frac{dL_z}{dt} = ?$$

Esercizio da fare

Studiare il moto di una pallina su di un tavolo legata ad un filo che scende da un foro al di sotto del tavolo. Se il filo è fermo la pallina ruota con velocità angolare fissa, se si tira il filo per qualche centimetro che accade?