Novenmbre 2011
Cap.13.v11

Appunti di Fisica _I
Primo semestre

Forze conservative

Sommario 1

Forze conservative

Consideriamo un mobile in un campo di forze F(x,y,z) *che dipende solo dal punto*. Immaginiamo che il mobile si sposti dal punto A al punto B lungo una traiettoria S_1.
Ecco il lavoro delle forze del campo per muovere il mobile da A a B lungo il cammino S_1

10) $$\int_{S_1} \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s} = L(A,B)$$

Nota: nel seguito per non appesantire la notazione, le variabili di punto A, B, O, P individuano le tre coordinate del punto. Per esempio P =(x_P,y_P,z_P) etc.
Il lavoro lungo la stessa traiettoria S_1 percorsa in senso inverso da B a A è L(B,A)=-L(A,B) e si capisce perchè il valore dell'integrale dipende dal senso di d**s.**
Supponiamo inoltre che il lavoro calcolato lungo un'altra traiettoria, S_2 , che va sempre da A a B sia ancora L(A,B) .
Cioè supponiamo che il lavoro (affermazione 1) *non dipenda dalla traiettoria* :

Come conseguenza, ne deriva che (affermazione 2) *il lavoro lungo una traittoria chiusa è nullo*. La dimostrazione è banale: si consideri la traiettoria chiusa costituita dai cammini S_1 e S_2 e si calcoli il lavoro partendo da A verso B su S_1 e poi da B ad A su S_2.
L(A,A)= L_{s1}(A,B) +L_{s2}(B,A)=0 poiché il lavoro non dipende dalla traiettoria, ma il segno dipende dalla direzione di percorrenza !

Prendiamo ora un punto di riferimento O e andiamo con partenza proprio da O in A, poi in B e poi ritorniamo in O. La traiettoria è chiusa, e pertanto il lavoro totale è nullo!

L(O,A) +L(A,B) +L(B,O)=0 ovvero L(A,B) = L(O,B) -L(O,A)

o che possiamo anche scrivere come

11) $$\int_A^B \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s} = L(A,B) = L(O,B) - L(O,A)$$

che ci ricorda tanto la definizione di funzione primitiva,
cioè (affermazione 3) *esiste una funzione F(P) = L(O,P)+C* (C costante arbitraria) tale che l'integrale curvilineo tra due punti P_1 e P_2 della funzione F è proprio, secondo la regola dell'integrale finito, la differenza della funzione *primitiva* calcolata in P_2 meno il valore calcolato in P_1. Nota "O" lo dimentico poiché è arbitrario ed il risultato, come si può facilmente dimostrare non cambia al cambiare di O!.

Il potenziale

12) $$\int_{P_1}^{P_2} F(x,y,z)\cdot d\vec{s} = \Phi(P_2) - \Phi(P_1) \quad \Phi \quad e'\ una\ funzione\ primitiva$$

$$definiamo\ energia\ potenziale \qquad U(P) = -\Phi(P)$$

La funzione U è una primitiva della funzione F(P) che esiste proprio perché (un teorema di matematica che abbiamo praticamente dimostrato!) l'integrale curvilineo di F (o il lavoro) su un circuito chiuso è nullo.
La funzione U che ha solo il segno cambiato rispetto a Φ si chiama energia potenziale del campo di forze F (o più semplicemente il potenziale del campo di forze F).
Ri_notiamo attentamente che *il potenziale è definito a meno di una costante*, infatti coincide, a parte il segno, con una funzione primitiva Φ(P). Variando O in O' la funzione primitiva varia di una costante, esattamente pari al lavoro L(O,O') fatto dalle forze del campo per andare da O a O' .!

Con i chiarimenti e definizioni di sopra è facile scoprire che il lavoro delle forze del campo fatto da A a B è L(A,B)=Φ(B)-Φ(A) = U(A)-U(B) e ovviamente quello fatto da B ad A è L(B,A)= U(B)-U(A) di segno contrario a quello di prima.

Nota: il potenziale U è una forma di energia e come tale si misura in Joule esattamente come il lavoro o la energia cinetica.

Conservazione dell'energia

Dal teorema delle forze vive, equazione 2, segue

12) $$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = L(A,B) = U(A) - U(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$U(A) + \frac{1}{2}mv_A^2 = U(B) + \frac{1}{2}mv_B^2$$

ovvero, vista l'arbitrarietà di A e B possiamo concludere che la quantità
$E = U + 1/2\, mv^2$ (detta Energia Meccanica totale)
è costante per tutto il moto.
Quindi la quantità energia cinetica più energia potenziale è una costante del moto per i campi di forza in cui è possibile definire una funzione potenziale, ovvero esiste una funzione primitiva del lavoro differenziale elementare.

I campi di forza che ammettono un potenziale sono detti ***campi conservativi.***

Seconda nota: le affermazioni 1,2,3 del paragrafo precedente sono equivalenti e basta una di esse per stabilire che una forza *posizionale* è anche conservativa.

Il potenziale e la forza

Immaginiamo adesso di conoscere il potenziale a priori: quanto vale la forza in un punto P?

Il lavoro elementare fatto da una forza per un trattino $\Delta\mathbf{s} = (\Delta s_x, \Delta s_y, \Delta s_z)$ a partire dal punto P si può esplicitamente scrivere

13) $$\vec{F}\cdot\Delta\vec{s} = F_x \Delta s_x + F_y \Delta s_y + F_z \Delta s_z = L(\vec{P}, \vec{P}+\Delta\vec{s}) = U(\vec{P}) - U(\vec{P}+\Delta\vec{s})$$

nell'ultimo termine ho scritto esplicitamente il vettore **P** per indicare il lavoro elementare fatto tra il punto **P** e il punto spostato di Δ**s**. D'altra parte il lavoro tra due punti si può esprimere come differenza del potenziale calcolato in **P** e in **P**+Δ**s**.

Scegliamo una versore **a** ed immaginiamo di fare uno spostamento (in modulo) Δs in quella direzione. La 13 diventa.

14) $$\vec{F}\cdot\hat{a}\,\Delta s = U(\vec{P}) - U(\vec{P}+\hat{a}\,\Delta s) = -(U(\vec{P}+\hat{a}\,\Delta s) + U(\vec{P}))$$

che dividendo per Δs, al limite, coincide con la componente della forza proiettata nella direzione del versore **a,** e cioè **F.a** Supponiamo allora di scegliere uno spostamento Δ**s** parallelo all'asse x, cioè Δx; la 14) si riduce a

15) $$F_x \Delta x = U(x_P, y_P, z_P) - U(x_P+\Delta x, y_P, z_P)$$

dividendo i due membri per Δx e passando al limite per x tendente a zero.

16) $$F_x = lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x_P, y_P, z_P) - U(x_P+\Delta x, y_P, z_P)}{\Delta x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

`Nota il segno meno!`

Da cui : *la componente x della forza è uguale alla derivata parziale del potenziale rispetto ad x cambiata di segno,* e cosi' via per le altre componenti.

Il segno meno deriva dalla definizione di potenziale, vedi 12).

Nota:
<u>Derivata parziale</u> vuol semplicemente dire che *nel caso di una funzione a più variabili la derivata rispetto ad una variabile corrisponde alla derivata rispetto a quella variabile mantenendo costanti tutte le altre.*

Naturalmente se il potenziale dipende da una sola variabile, allora la derivata parziale coincide con la derivata totale rispetto a quella variabile.

Come ultimo corollario di quanto sin qui detto ecco un nuovo utile formalismo

17)
$$\vec{F}\cdot d\vec{s}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}ds_x+\frac{\partial U}{\partial y}ds_y+\frac{\partial U}{\partial z}ds_z\right)=-\vec{\nabla}U\cdot d\vec{s}$$
$$con$$
$$\vec{\nabla}U\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)U=\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$
$$finalmente$$
$$\vec{F}=-\vec{\nabla}U$$

dove il simbolo ∇ (nabla) è chiamato l'*operatore gradiente* e trasforma la funzione scalare U in un vettore, le cui tre componenti sono, le tre derivate parziali rispetto alle coordinate. Essenzialmente sono le tre componenti, a meno del segno, delle forza.

In conclusione anche se il potenziale è definito a meno di una costante, *poco importa* visto che ci serve solo la differenza tra due punti o la sua derivata prima !

Il potenziale nel campo gravitazionale costante

Vediamo adesso il problema di un grave che cade dalla torre. Il campo di forze -mg è costante e sempre nella direzione dell'asse z che immaginiamo puntare verso l'alto.
Il potenzialo lo possiamo ricavare in due modi:
1) Calcoliamo il lavoro per spostare un grave di massa m dal livello zero ad una altezza z

18)
$$\int_0^z m\vec{g}\cdot d\vec{s}=-\int_0^z mg\,dz=0-mgz=L(0,z)=U(0)-U(z)$$
$$da\,cui$$
$$U(z)=mgz \qquad il\ poteziale$$

2) o semplicemente ci domandiamo se esiste una funzione di z che derivata rispetto a z e cambiata di segno ci fornisce la forza in z applicata sul nostro grave:

Ovviamente nel nostro caso esiste ed è V (z) = mgz + Cost. la costante la fissiamo a zero se vogliamo che il potenziale sia nullo al livello zero.

Abbiamo il potenziale, quindi il sistema è conservativo, cioè l'energia potenziale più quella cinetica si conserva durante tutto il moto. Possiamo immediatamente scrivere la seguente relazione,

18) $$\frac{1}{2}mv^2+mgz=E_0$$

Dove la costante E_0 dipende evidentemente dalle condizioni iniziali.
Ebbene il nostro grave è inizialmente fermo sulla cima della torre, cioè a h=60 m; la sua energia potenziale è data semplicemente da E_0 = mgh. Se lo lascio cadere la sua energia potenziale diminuisce a scapito della energia cinetica e quando arriva al suolo, dove l'energia potenziale è nulla avremo

19) $$\frac{1}{2}mv^2=E_0=mgh \qquad da\,cui \qquad v=\sqrt{2\mathrm{gh}}$$

come già
avevamo trovato.