Pisa Novembre 2009
Cap.12.v.09

Fisica _I

Primo semestre

Meccanica

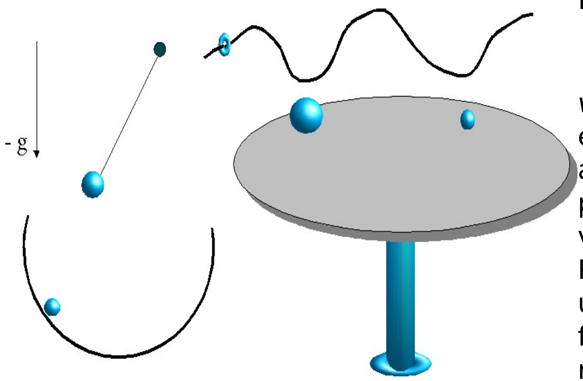
Vincoli

Table of Contents

Introduzione

Già nei capitoli passati abbiamo avuto l'occasione di parlare dei vincoli che limitano i movimenti di un corpo in moto in uno spazio più limitato o addirittura ne riducono i gradi di libertà. Di solito i vincoli sono rappresentati da altri corpi che immaginiamo di grandissima massa o senza massa, secondo la loro funzione, fissi nello spazio o liberi di fare alcuni movimenti.
Due semplici esempi:

- un piano che inpedisce ad una pallina di cadere in basso; questo è un vincolo unilaterale poichè limita il moto da un lato.
- un filo metallico rigido che fissa la traiettoria di una perlina; vincolo bilaterale.



Reazioni vincolari

Il vincolo agisce con una forza, detta *reazione vincolare*, ogni volta che un corpo preme su di esso. La reazione è una schematizzazione di quanto avviene (azione e reazione) microscopicamente nel punto o nei punti di contatto tra il mobile ed il vincolo.
Per esempio un corpo di massa m appoggiato su di un piano non sprofonda in basso poichè la sua forza peso viene esattamente controbilanciata dalla reazione vincolare. Se una sferetta corre su una superfice concava, curva continuamente a causa della reazione vincolare che la devia con una forza pari alla forza centripeta necessaria.
La reazione vincolare controbilancia infatti la reazione dinamica della pallina causata dalla geometria del moto.

Le *reazioni vincolari*, indicate con ***R,*** *sono normali* alla superficie del vincolo e non sono note a priori. In casi semplici sono immediatamente calcolabili, in altri casi, quando dipendono dalla dinamica del moto, fanno parte delle variabili del sistema.

Come è noto dalla matematica, poichè il numero delle equazioni indipendenti di un sistema deve uguagliare il numero delle variabili da valutare, l'introduzione di reazioni vincolari implica l'aggiunta di equazioni tra le coordinate, dette *equazioni dei vincoli,* che riducono i gradi di libertà del sistema meccanico.

Per esempio se introduciamo un vincolo che obbliga il mobile a muoversi lungo una retta dovremmo introdurre esplicitamente insieme alle equazioni derivanti da $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ l'equazione parametrica della retta: $\mathbf{P}=\mathbf{a}t+\mathbf{P}_0$ (sono tre equazione più un parametro "t" in più!) per vincolare il moto alla traiettoria prestabilita. In effetti in casi come quello, si lavora direttamente con una sola coordinata, la *coordinata* lungo la traiettoria stessa.

Anche nel caso in cui il mobile fosse vincolato ad una traiettoria circolare di raggio r potremmo introdurre l'equazione vincolare $x^2+y^2=r^2$, tuttavia una coordinata angolare basta per descrivere il sistema.

In definitiva si finisce con l'usare un numero minore di coordinate (pari al numero dei gradi di libertà del sistema meccanico senza vincoli, meno il numero delle equazioni vincolari introdotte) e diverse dalle coordinate cartesiane che chiameremo *coordinate generali,* più adatte allo scopo: una coordinata curvilinea, come nel caso di una traiettoria fissata o uno o più angoli nel caso di moti su traiettorie note circolari o sferiche.

La presenza dei vincoli inducono certamente all'uso di *coordinate generalizzate*, tuttavia, come abbiamo già notato, spesso si usano cordinate sferiche, polari etcc. a seconda delle simmetrie del problema anche se non ci sono vincoli e pertanto quelle coordinate sono pure esse *coordinate generalizzate.*

Ritornando ai vincoli, va notato che vi sono però casi più difficili da trattarsi analiticamente, come per esempio quando ci sono i vincoli unilaterali.!

Intanto si scopre che i vincoli sono classificabili in *vincoli lisci* o *vincoli scabri*.

Vincoli lisci

Il vincolo liscio è un vincolo la cui reazione è solo normale alla superfice e quindi ammette solo le traiettorie compatibili (tangenti) con il vincolo stesso.

Il fatto importante è che un tal vincolo non può influire sul moto tangenziale al vincolo, mentre annulla del tutto le forze normale ad esso.

Un grave di massa m poggia su di un tavolo con una forza - mg, il tavolo reagisce con una forza R= mg che mantiene la pallina a livello.

La forza vincolare è presente quando la pallina tocca il tavolo, ma praticamente si annulla appena uno di noi la solleva dal tavolo poichè con il cessare del peso sulla tavola cessa immediatamente anche la reazione.

Se applichiamo alla pallina una forza laterale cioè tangente al vincolo; la pallina soggetta a questa forza come unica risultante di tutte le forze, si mette in moto accellerandosi di conseguenza.

Usando cosciamente o incosciamente questo concetto, il Galileo studiò il moto sul piano inclinato traendone deduzioni fondamentali.

Il filo e la fune

La fune è un vincolo particolare, che ci permette di trasferire la forza da un mobile all'altro purchè *si lavori sempre in trazione*. Intanto pensando al gioco della fune si capisce immediatamente la funzione: se essa viene tirata da un lato con una forza F, la stessa forza è trasmessa all'altro lato della fune e dovrà essere bilanciata da una reazione data da una forza uguale e contraria. Finchè una delle due forze, quella di destra o quella di sinistra sono pari, i due estremi della fune con i due "mobili" annessi, restano fermi, mentre la fune si tende sotto la trazione. La tensione della fune è una grandezza la cui intensità si misura in N, giusto come una forza. In ogni suo punto interno c'è questa tensione t che deriva dallo stress (allungamento elastico) a cui la fune è sottoposta, la sua direzione è la direzione della fune, ma il senso non è definito. In ogni punto ci sono due forze dirette verso i due estremi che sono l'una la reazione dell'altra ed ambedue sono reazione delle forze esterne agli estremi della fune.

Ora una fune è flessibile e mediante rimandi lisci, come carrucole, può trasmettere la tensione in curva permettendoci di costruire meccanicismi interessanti.

Un punto debole è il fatto che la sua massa non può essere trascurata e pertanto cambia il moto dei mobili ad essa connessi. Prendiamo infatti una fune connessa ad una palla di massa M, se noi applichiamo una forza F all'estremo libero, la fune va in tensione e tira la pallina e la accelera di $a= F/(M+m)$ dove m è la massa della fune, e non di $a=F/M$ come magari avremmo immaginato.

Un vincolo perfetto non dovrebbe introdurre alterazioni inutili! Per questo noi parleremo di **fili**, che schematizzano bene una fune di massa trascurabile (cioè nulla!).

Vincoli scabri

I vincoli lisci sono una idealizzazione della realtà che *non tiene conto dell'attrito* che può sorgere tra il mobile e la superfice del vincolo dovuto alla interazione microscopica tra le molecole dei materiali in cottatto. Purtroppo è praticamente impossibile trascurarlo!

Esso comunque si osserva ogni volta si voglia mettere in movimento un corpo in quiete (rispetto al vincolo) o lo si voglia accelerare e ha la direzione che si oppone al moto o meglio alla forza che tende a cambiare lo stato del mobile.

Non esiste una teoria dell'attrito perfetta, ogni caso va trattato individualmente, tuttavia esiste un schema a cui conviene rifarsi per i casi più comuni. Qui di seguito una traccia!

Ci sono due tipi di attrito:

L'attrito statico:

Un mobile appoggiato su di una superfice in quiete, se viene spinto in una direzione non parte finchè la forza applicata non è sufficiente a rompere tutti i legami interattivi che si erano formati durante lo stato di riposo. Si dice che la forza applicata deve essere superiore alla forza di attrito statico. In genere si pensa che l'attrito sia proporzionale, μ_s, alla forza normale alla superfice su cui il mobile è appoggiato:

Sussiste una realzione tra i moduli delle forze, quella normale al vincolo e quella tangente.

1) $|F_t| = \mu_s\ |F_n|$ $0<\mu_s<1$. valore tipico ~ 0.7

Quindi per metere in moto un mobile di peso P=Mg dovremo essere sicuri di disporre di una forza superiore a μ_s Mg per iniziare il movimento.
Se appoggiamo un mobile su di un piano inclinato di angolo θ, scivola giu? e quando?
vedi:

1)
$$\begin{gathered} P_n = P\cos\theta \qquad P_t = P\sin\theta \\ R_n = P_n \qquad R_t = \mu_s P_n \\ moto\ per \\ P_t > R_t \quad ovvero \quad P\sin\theta > \mu_s P\cos\theta \\ da\,cui \\ tang\,\theta > \mu_s \end{gathered}$$

quindi μ_s ha anche un significato trigonometrico.
Si consideri la normale al vincolo nel punto di contatto e si disegni attorno a questa il cono che ha una apertura angolare θ_s=arcotang(μ_s), quindi si verifichi se la forza totale sul mobile è interna o esterna al cono: *le forze che sono contenute in direzioni all'interno del cono d'attrito non potranno mai mettere in movimento il mobile.*

Attrito dinamico

Il mobile è già in moto, le asperità della superfice restano, ma non tutte poichè quelle che hanno bisogno di tempo per formarsi non sono operative.
La forza di attrito, che ancora agisce proprio nella direzione opposta al moto, tende a frenare il mobile pertanto occorrerà spingere continuamente il mobile (applicare una forza sul mobile....) per mantenerlo a velocità costante con una forza pari all'attrito dinamico. Come prima l'attrito è proporzionale alla forza perpendicolare al vincolo secondo un coefficiente μ_d che tipicamente vale 0.3 - 0.5 .
Supponiamo di avere messo in moto un mobile su di un piano inclinato , quale è la pendenza minima perchè il mobile discenda con velocità costante?
Vale la stessa visualizzazione del geometrica del problema dell'attrito statico.
Quindi basterà che il piano abbia una pendenza maggiore di

$$\theta_d = arcotang(\mu_d)$$

Dimostrare!