Pisa novembre 2010
Cap.11.v.10

Fisica _I
Primo semestre

Meccanica
Dinamica IV

Table of Contents

L'oscillatore armonico (ripasso)

Abbiamo già incontrato l'oscillatore armonico, oggi ne riprenderemo l'analisi.
Ricordo che l'oscillatore è un sistema dinamico elementare la cui comprensione è fondamentale per una descrizione completa della natura.
Dunque il sistema può essere rappresentato da una molla connessa ad un punto fisso, generalmente pensata di massa trascurabile; la massa invece si pensa tutta concentrata nella pallina attaccata all'estremo libero. Quello che importa è il modello della forza che per il momento studiamo in una sola dimensione.

1) $F= - k(X- X_0)$ dove k è la costante elastica espressa in N/m , X_0 è la lunghezza di riposo della molla.
2) l'equazione della molla unidimensionale si scrive

$$m\ddot{x}=-k(x-x_0) \qquad 1)$$

Intanto possiamo renderci la vita più' facile semplicemente spostando lo zero dell'asse di riferimento proprio di X_0 . Definiamo $x = X- X_0$ e notiamo che le derivate prima e seconda di X coincidono con quella di x. L'equazione si riduce a

2)
$$m\ddot{x}=-kx \quad segue \quad \ddot{x}=-\omega^2 x \quad con \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

 la seconda equazione è

che può essere facilmente risolta usando le tecniche matematiche (oltre alla soluzione numerica!). Una equazione differenziale canonica in cui si afferma che la derivata seconda della variabile (rispetto al tempo) è proporzionale alla variabile stessa e che per questo si chiama *armonica.*

La soluzione tipica è una funzione armonica del tempo, per esempio

3) $x(t) = A\sin(\omega t+ \phi)$

dove abbiamo introdotto due parametri A [m] e ϕ una fase adimensionale (in radianti o gradi) da definire in accordo con le condizione iniziali; ω (ha le dimensioni [s^{-1}] poiché ωt deve essere adimensionale) ci fornirà la scala dei tempi o meglio il tempo in cui il sistema compie un ciclo completo; deve dipendere ovviamente dalle caratteristiche fisiche dell'oscillatore, come vedremo immediatamente.

Sostituiamo la funzione proposta nella equazione del moto per verificare se è soddisfacente e per fissare i due parametri arbitrari ed il valore di ω.

4)

$$\ddot{x}=-A\omega^2\sin(\omega t+\phi)=-\frac{k}{m}x(t)=-A\frac{k}{m}\sin(\omega t+\phi) \quad da\,cui$$

$$\omega=\sqrt{(\frac{k}{m})} \quad con \quad \omega=2\frac{\pi}{\tau}$$

che è perfettamente soddisfatta con la definizione indicata. Se poi definiamo $\omega= 2\pi/\tau$, diamo un significato ad omega come 2π volte l'inverso del periodo t di oscillazione del sistema, ovvero 2π volte la frequenza di oscillazione , $n=1/\tau$.

Ed ora fissiamo le costanti del sistema.

Posizione iniziale (si immagina la molla tirata) è ad $x = A_0$ e con velocità nulla, ovvero sostituendo nella x(t) e dx(t)/dt per t=0

$$A\sin(\phi)=A_\sigma \quad per\, la\, posizione\, iniziale$$
$$A\,\omega\cos(\phi)=\sigma \quad per\, la\, velocita'\, iniziale$$

dalla seconda si ricava immediatamente la fase iniziale $\phi=\pi/2$ che sostituita nella prima fissa l'ampiezza massima di oscillazione a $A= A_0$.

L'equazione finale, ricordando lo spostamento dell'origine degli assi in X_0 è

5) $$X=X_0+A_0\cos(\omega t)$$

 la seconda equazione è

se avessimo scelto altre condizioni iniziali avremmo trovato funzioni armoniche diverse, ma con la stessa frequenza di pulsazione determinata da ω, o meglio dalle caratteristiche fisiche dell'oscillatore: k ed m.
Per esempio imponiamo $x(0)=0$ e $dx(0)/dt = v_0$, avremmo trovato le due equazioni

$$A \sin(\phi)=0 \quad \textit{per la posizione iniziale}$$
$$A\,\omega \cos(\phi)=v_0 \quad \textit{per la velocita' iniziale}$$

la fase risulta nulla dalla prima equazione e l'ampiezza $A = v_0/\omega$ da cui

6)
$$X = X_0 + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

e in generale per condizioni iniziali arbitrarie

7.1)
$$A \sin(\phi)=A_0 \quad \textit{per la ampiezza iniziale}$$
$$A\,\omega \cos(\phi)=v_0 \quad \textit{per la velocita' iniziale}$$
$$\textit{segue con un po' di conti, dividendo la seconda equazione per } \omega$$
$$A=\frac{1}{\omega}\sqrt{\omega^2 A_0^2+v_0^2} \qquad e \qquad \tan\phi=\frac{\omega A_0}{v_0}$$
$$\textit{che possiamo anche scrivere come}$$
$$\sin(\phi)=\frac{\omega A_0}{\sqrt{\omega^2 A_0^2+v_0^2}} \qquad \cos(\phi)=\frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 A_0^2+v_0^2}}$$

dunque sostituendo nella 3)

7.2)
$$X = X_0 + A\sin(\omega t+\phi) = X_0 + A\sin(\omega t)\cos(\phi) + A\cos(\omega t)\sin(\phi)$$
$$\textit{segue}$$
$$X = X_0 + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + A_0\cos(\omega t)$$

che è poi la *sovrapposizione dei due moti armonici.*

Posizione di equilibrio

Interessante sarebbe stato prendere come condizione iniziale $x(0)=0$ e $v(0)=0$; avremmo trovato come risultato un moto nullo. La posizione $x = 0$ è detta essere una *posizione di equilibrio.* Infatti, indipendentemente dalla legge della forza in

 la seconda equazione è

gioco, il mobile, nei punti in cui la forza è nulla , se non è già animato da una velocità propria, resta immobile.
Un punto è detto di *equilibrio stabile* se il mobile, spostato dal punto iniziale, tende a ritornare nella stessa posizione, di *equilibrio indifferente* se il mobile rimane in equilibrio in tutta una regione attorno al punto di partenza, è invece di *equilibrio instabile* se un piccolo spostamento genera un allontanamento definitivo del mobile dal punto di partenza.
Il punto x=0 per il sistema a molla di sopra è un punto stabile infatti ogni tentativo di spostare la pallina dalla posizione di riposo della molla, la pallina ritorna indietro. In effetti entra in oscillazione attorno al punto di equilibrio, tuttavia nella vita reale gli attriti smorzano l'ampiezza di oscillazione fino ad arrestare il moto in x=0.

Costante del moto

Sfruttiamo il teorema integrale delle forze vive del capitolo 10. Qui la forza dipende dalla posizione del punto, o meglio dalla lunghezza della molla. Partendo dalla definizione 2b del capitolo passato:

$$\int_A^B -kx\,dx=\frac{1}{2}kx_A^2-\frac{1}{2}kx_B^2=\frac{1}{2}m\,v_B^2-\frac{1}{2}m\,v_A^2$$

ovvero la somma della energia cinetica piu' l'energia di posizione (potenziale)

$$E=\frac{1}{2}m\,v_A^2+\frac{1}{2}kx_A^2=\frac{1}{2}m\,v_B^2+\frac{1}{2}kx_B^2$$

e' costante

Questa formula, come abbiamo già avuto opportunità di notare, ci indica che la energia totale, cinetica più' potenziale è una costante del moto è può essere sfruttata per risolvere i nostri problemi.
Per esempio possiamo calcolare questa energia in un istante opportuno, per esempio nell'attimo del massimo allungamento (o accorciamento) della molla proprio

quando l'energia o è tutta posizionale, $E_0=\frac{1}{2}k\,A_0^2$, o tutta cinetica $E_0=\frac{1}{2}m\,v_0^2$

e cosi' possiamo impostare una equazione del tipo

8.4 $$\frac{1}{2}k\,A_0^2=\frac{1}{2}k\,x^2+\frac{1}{2}m\,v^2$$

che ci permette di valutare, nota l'ampiezza massima o meglio l'energia dell'oscillatore, la velocità del mobile in funzione della posizione senza dover

 la seconda equazione è

risolvere l'integrale alle derivate seconde del moto. Per questo si indica come il teorema della *conservazione dell'energia*. Per il fatto che in esso si coinvolgono solo le velocità, cioè solo derivate prime, la conservazione dell'energia è considerato come un *integrale primo* del moto.

E_0 è una costante del moto importantissima che incontreremo, anche se sotto forme diverse e con poche eccezioni, in quasi tutti i problemi di fisica.
Problemino: dimostrare derivando la 8.4 che è veramente una costante del moto?

L'oscillatore armonico soggetto anche ad una forza costante.

Prendiamo il solito sistema costituito da una pallina di massa m legata all'estremità di una molla (k,x_0) con a sua volta l'altro estremo fissato in un punto fisso.
Supponiamo che il sistema di fatto sia appeso ad un punto fisso qui sul nostro pianeta e giustamente la pallina risenta di una forza costante pari al suo peso p= -mg verso il basso... naturalmente adesso supponiamo di essere in un sistema inerziale!
L'equazione del moto dovrà ora tenere di conto di due forze, quella dipendente dalla elasticità della molla e quella derivante dal suo peso. L'asse delle x è orientato nelle direzione della forza di gravità:

9) $$m\ddot{x}=-k(x-x_0)+mg$$

che potremmo risolvere analiticamente (numericamente? anche!). Nel seguito è indicata la soluzione.
Dalla 9) si ottiene con una facile algebra il seguente risultato

10 $$m\ddot{x}=-kx+kx_0+mg=-k(x-x') \qquad x'_0=x_0+\frac{mg}{k}$$
$$m\ddot{x}=-k(x-x'_0)$$

Una equazione del moto esattamente identica alla uno e porterà agli stessi risultati avendo cura di sostituire X_0 con X'_0. La soluzione generale è la stessa di prima

11) $$x=X'_0+\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)+A_0\cos(\omega t)$$

 la seconda equazione è

da cui si capisce che il moto è ancora armonico con frequenza determinata da k e m, ma che oscilla attorno ad un nuovo punto.
D'altra parte il nuovo punto è anche il punto di equilibrio, infatti e li' che la forza totale è nulla (imponi nella equazione ma = 0 nella 9)) e li' che la pallina rimane ferma se non disturbata.

Insomma il sistema sotto la forza peso (o una qualsiasi forza costante) si allunga e oscilla nella nuova posizione di equilibrio stabile con la frequenza caratteristica del sistema (k,m) . Ricordare questo esempio poiché in seguito ne faremo indirettamente uso.

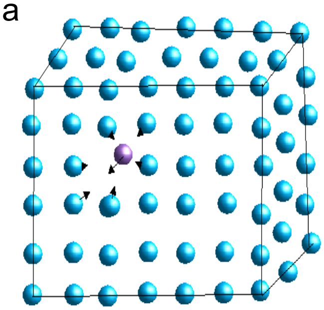
Oscillatore armonico tridimensionale isotropo

Rendiamoci adesso la vita un po più' complicata.................
Il modello di forza elastico può essere usato per descrivere tanti altri casi. Per esempio gli atomi in un cristallo sono in una posizione di equilibrio stabile e se vengono mossi cominciano ad oscillare. Ora possiamo studiare il moto di un atomo nella sua sede, tuttavia non possiamo parlare di moto unidimensionale, ma evidentemente dobbiamo pensare ad un moto tridimensionale e dobbiamo accontentarci di spostamenti piccoli rispetto alle distanze interatomiche per restare nella regione in cui la interazione dell'atomo con il resto dell'ambiente può essere descritta in modo elastico. Dunque immaginiamo una pallina immersa in un campo elastico descritto da un modello di forza come

12) $\mathbf{F} = -k\mathbf{R}$ con **R** il vettore spostamento dal punto di equilibrio (che chiameremo centro).

la forza è proporzionale alla distanza dal centro ed ha la direzione individuata dal raggio_spostamento ed il senso verso il centro. Quando la pallina si allontana dal centro la forza la richiama verso il centro, come del resto accadeva nel caso unidimensionale.

Nota:
In effetti il modello di forza indicato deriva da considerazioni semplici. Si pensi ad un atomo (o molecola) immersa in nel solido di cui fa parte. Nel punto dove l'atomo si trova, è un punto di stabilità e li' la forza netta derivata da tutte le interazione degli atomi vicini è nulla; ma appena ci si allontana nasce una forza di richiamo che spinge l'atomo indietro. Possiamo immaginare che esista una funzione forza che dipende dalla posizione, complicatissima, ma che noi



 la seconda equazione è

sviluppiamo attorno al punto di equilibrio stabile, dove la forza è nulla, limitandoci giusto al primo ordine:

$$F_x(x,y,z)=F_x(0)+\frac{\delta F_x}{\delta x}x+......=-kx \quad 13)$$
$$F_y(x,y,z)=F_y(0)+\frac{\delta F_y}{\delta y}y+......=-ky$$
$$F_z(x,y,z)=F_z(0)+\frac{\delta F_z}{\delta z}z+......=-kz$$
$$o\, vettorialmente\, newlinedot\, \vec{F}=-k\,\vec{r}$$

L'equazione del moto (k qui è supposto lo stesso per ogni coordinata)

$$14)\quad \begin{aligned} &m\ddot{\vec{r}}=-k\vec{r}\\ &che\ equivale\ alle\ tre\ equazioni\ indipendenti\\ &m\ddot{x}=-kx\\ &m\ddot{y}=-ky\\ &m\ddot{z}=-kz\\ &\quad con\ soluzioni\ ormai\ note\ sono\\ &x=A_x\sin(\omega t+\phi_x)\\ &y=A_y\sin(\omega t+\phi_y)\\ &z=A_z\sin(\omega t+\phi_z)\end{aligned}$$

Il moto è dato dalla composizione di tre moti armonici indipendenti sui tre assi.Il moto nello spazio comunque dopo un periodo si ripete esattamente come prima poiché la frequenza di oscillazione è la stessa per ciascun asse; in questo caso il *moto è chiuso*.
Una terna di coppie di costanti iniziali definirebbero totalmente il moto nello spazio.
Immaginiamo per esempio che A_z sia nulla, il moto resta sul piano x,y ed è determinato dalle ampiezze e dalle fasi corrisponderti a x e y.
Per ampiezze x,y uguali e la fase di x, $\phi_{x=}$ $\pi/2$, e quella di y nulla: il moto è un cerchio perfetto descritto dal punto (atomo) a velocità angolare costante $\omega = \sqrt{(k/m)}$. In generale, con fasi e ampiezze diverse si possono avere varie forme di ellissi, rotate o meno rispetto agli assi x,y , e nel caso di fasi nulle o π scopriamo moti oscillanti lungo rette più' o meno inclinate rispetto agli assi.
Se A_z non è nullo il moto non è più' sul piano x,y, ma come vedremo più' avanti resta sempre su di un piano.
Comunque possiamo sempre metterci sul piano in cui avviene il moto e chiamarlo x,y.

 la seconda equazione è

Coordinate polari

Mettiamoci sul piano x,y in cui avviene il moto e cerchiamo di esprimere la relazione dinamica tra la forza e l'accelerazione *in coordinate polari* ρ e ϕ. Per fare i conti notare che qui ρ non è costante!

Per questo partiamo dal vettore **R** in coordinate cartesiane, lo esprimiamolo in funzione delle coordinate polari e lo deriviamo una e due volte, sfruttando regole già imparate, per ricavare l' accelerazione in funzione delle coordinate polari.

Ricordo che la velocità angolare ω con cui *il punto mobile ruota sul piano* è espressa da un vettore parallelo all'asse z con il modulo e senso (segno) individuato da dϕ/dt e naturalmente non è costante!

15) $$\vec{R} \equiv (\rho\cos\phi, \rho\, sin\,\phi) \equiv \rho(\cos\phi, sin\,\phi) \equiv \rho\hat{R}$$

con $\omega = \dot{\phi}\hat{z}$ *e* $\dot{\omega} = \ddot{\phi}\hat{z}$ *la velocita' e'*

$$\dot{\vec{R}} = \dot{\rho}\hat{R} + \vec{\omega}\wedge\vec{R}$$

l'accelerazione, dopo un po' di conti...(già rifatti! ma qui ω non è costante!)

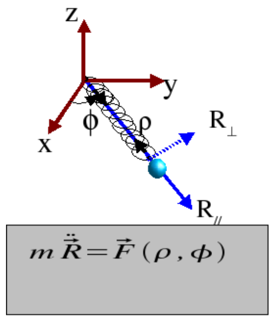
$$\ddot{\vec{R}} = \ddot{\rho}\hat{R} + \dot{\rho}\vec{\omega}\wedge\hat{R} + \dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{R} + \vec{\omega}\wedge(\dot{\rho}\hat{R} + \vec{\omega}\wedge\vec{R})$$

$$\ddot{\vec{R}} = \ddot{\rho}\hat{R} + 2\vec{\omega}\wedge\dot{\rho}\hat{R} + \dot{\vec{\omega}}\wedge\rho\hat{R} - \omega^2\vec{R} \text{ da cui}$$

$$\ddot{\vec{R}} = (\ddot{\rho} - \omega^2\rho)\hat{R} + (\dot{\omega}\rho + 2\omega\dot{\rho})\hat{\omega}\wedge\hat{R}$$

che possiamo anche esprimere come

$$\ddot{\vec{R}} = (\ddot{\rho} - \omega^2\rho)\hat{R} + (\dot{\omega}\rho + 2\omega\dot{\rho})\hat{T} \qquad \hat{T}\perp\hat{R}$$



l'ultima *esprime l'accelerazione* in funzione di due componenti, una lungo il raggio e l'altra perpendicolarmente a questo. Proiettando[1] l'equazione del moto **F**=m**a** su questi due assi sostituendo **a** con l'accelerazione come espressa in 15) (e ϕ punto con ω) :

16) $$m\ddot{\vec{R}}\cdot\hat{R} = m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 = \vec{F}\cdot\hat{R} = F_{F\|\vec{R}}(\rho, \phi)$$
$$m\ddot{\vec{R}}\cdot\hat{T} = 2m\dot{\rho}\dot{\phi} + m\ddot{\phi}\rho = \vec{F}\cdot\hat{T} = F_{F\perp\vec{R}}(\rho, \phi)$$

[1] Proiettare una funzione vettoriale, od un'equazione vettoriale o semplicemente un vettore su di un asse di versore **U**, vuol dire moltiplicare la funzione (equazione...) scalarmente per il versore **U**. Per esercizio proiettare l'equazione **F**=m**a,** con **F** = -(GmM/r³)*__R__ sugli assi x e y in funzione delle variabili ρ e ϕ.

 la seconda equazione è

e cosi' abbiamo trovato una relazione del tutto generale tra forza applicata e le variabili in coordinate polari.
Quindi l'equazione del moto scritte in coordinate polari, per un moto piano sono:

17)

$$
\begin{aligned}
&1)\, m\ddot{\rho} = F_{F\|\vec{R}}(\rho,\phi) + m\rho\dot{\phi}^2 \\
&2)\, m\rho\ddot{\phi} = F_{F\perp\vec{R}}(\rho,\phi) - 2m\dot{\rho}\dot{\phi} \\
&\text{o anche dalla 2)} \\
&m\frac{1}{\rho}\frac{d\rho^2\dot{\phi}}{dt} = F_{F\perp\vec{R}}(\rho,\phi)
\end{aligned}
$$

dove la terza equazione si è ottenuta dalla seconda delle 16) moltiplicando e dividendo per ρ, il primo membro.
Si riconosce nella prima delle 17) un termine che indica una accelerazione radiale centrifuga.
Di fatto il sistema polare è *un sistema di riferimento che ruota* con la pallina e una forza reale (centripeta) deve controbilanciare la forza centrifuga che nasce dalla traiettoria curva. Anche nella seconda vi sono termini che ricordano l'accelerazione di Coriolis come risulta anche dalla ultima equazione delle 16).

Esercizio: ***Scrivere le equazioni del moto direttamente nel sistema ruotante con la pallina. Ricorda le forze apparenti!***

Nota: Ricorda che nel sistema ruotante la pallina si muove sempre lungo il raggi **ρ** . La componente $md\rho^2/dt^2$ è uguale alla forza reale che agisce lungo ρ più' la forza apparente centrifuga; la componente traversale è $m\rho d\phi^2/dt^2$ deve bilanciare la forza reale trasversale, se esiste, più' quella apparente di Coriolis affinché il moto resti sempre sull'asse **ρ** del sistema ruotante.

Equazione dell'oscillatore in coordinate polari

Ritornando all'oscillatore, ricordo che la forza è sempre diretta lungo il raggio, cioè è sempre radiale, mentre la forza tangenziale reale *è sempre nulla*. Questo fatto porta, con riferimento alla terza equazione (17), alla definizione di una costante del moto! Il *momento angolare*.

18)

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 = -k\rho \\
&m\frac{d\rho^2\dot{\phi}}{dt} = 0 \quad \text{che integrata diventa} \quad m\rho^2\dot{\phi} = L \\
&L \sim \text{e' una } \textbf{costante} \quad \text{da fissare detta} \quad \textbf{momento angolare}
\end{aligned}
$$

 la seconda equazione è

ricaviamo la velocità angolare ω in funzione del parametro L (*costante del moto da fissare secondo le condizioni iniziali*) e la sostituisco nella prima.

19) $$m\ddot{\rho}=-k\rho+\frac{L^2}{m\rho^3}$$

abbiamo ridotto il moto bidimensionale ad un moto unidimensionale lungo il raggio; integrando (analiticamente se siamo bravi, oppure numericamente) troveremo la equazione oraria del moto in ρ, che sostituita nella seconda equazione delle 18) ci fornisce anche la velocità.
Vediamo alcuni casi.

Supponiamo che L =0; poiché il raggio non può essere nullo altrimenti la pallina sta ferma, allora la velocità angolare è nulla. L'equazione 19) si riduce all'equazione di un oscillatore armonico unidimensionale già studiato!

Supponiamo che L sia diverso da zero , ma supponiamo che la distanza dal centro sia costante, quanto vale la velocità angolare?
Se la distanza è costante la derivata prima e seconda di ρ è nulla, sostituendo nella 19) l'espressione di L si scopre:

20) $$-k\rho+\frac{m^2\rho^4\dot{\phi}^2}{m\rho^3}=-k\rho+m\rho\dot{\phi}^2=0$$
$$da\ cui$$
$$\dot{\phi}=\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

quindi la velocità angolare è pure costante ed è definita dalle caratteristiche fisiche del sistema (k,m), esattamente come abbiamo già scoperto in coordinate cartesiane.

Nota:
Avremmo anche potuto usare un sistema di riferimento sferico.
Ricordando la relazione tra il sistema cartesiano e quello sferico, vi propongo di ricavare le equazioni del moto orarie in coordinate sferiche?