Pisa novembre 2009
Cap.10.v.09

Appunti di Fisica _I
Primo semestre

Lavoro e energia

Table of Contents

Introduzione 1
Forze vive (forma differenziale)....................................1
Teorema delle forze vive..2
Lavoro di più forze...3
Spostamento di una valigia.... 3
Sistema a più corpi...4
L'energia è un concetto 5
Costante del moto...5

Introduzione

Nel sollevare una valigia da terra e per depositarla in un ripostiglio più alto facciamo, come si dice comunemente, *fatica.* In effetti siamo costretti a fare un notevole sforzo per realizzare lo spostamento della valigia e comunemente parlando, indichiamo tutta l'operazione di spostamento-valigia con il con il termine di *lavoro*.

In fisica si usa esattamente lo stesso termine, *lavoro*, ma con una definizione rigorosa che ci chiarisce chi fa il lavoro,.. come e quanto....

Forze vive (forma differenziale)

Partiamo dalla osservazione che il lavoro è sempre connesso con uno spostamento e con le forze che agiscono sul mobile spostato. Certamente l'attore principale del lavoro è la forza, che applicata ad un mobile, lo sposta, lo accelera o lo frena.

C'è quindi da aspettarsi una relazione tra lo stato dinamico del mobile e lo spazio percorso. Partiamo come al solito dalla equazione fondamentale della dinamica **F**=m**a** e immaginiamo che il mobile abbia percorso un intervallo elementare di spazio **v**.dt =d**s**. Moltiplichiamo i due membri della equazione della dinamica scalarmente per il vettore elementare di spostamento: $\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt=\vec{F}\cdot d\vec{s}=m\vec{a}\cdot\vec{v}\,dt=m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v}\,dt=\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)\,dt=d\,E_c$

1)
$$\Delta L=\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt=\vec{F}\cdot d\vec{s} \qquad Lavoro\,elementare$$
$$E_c=\frac{1}{2}mv^2 \qquad Energia\,cinetica$$

Definiamo il primo termine **F**.d**s = ΔL** come il *lavoro elementare fatto dalla forza **F** nello spostarsi di d**s*** .L'energia cinetica, indicata con E_c, è una grandezza che indica l'*attività di moto del mobile*.

- Il lavoro è fatto dalla (o si riferisce alla) forza totale o dal campo di forze agenti sul mobile
- Il lavoro è uno scalare in quanto si ottiene come prodotto scalare della forza per il vettore spostamento.
- Il lavoro dipende dal coseno dell'angolo individuato dai due vettori, la forza e lo spostamento. Pertanto può essere positivo e negativo, *ma anche nullo quando i due vettori sono perpendicolari!*
- *Il lavoro elementare è pari alla variazione della Energia cinetica del mobile a cui è applicata la forza nello stesso intervallo.*
- Le dimesioni del lavoro sono forza x lunghezze e cioè [M L^2 T^{-2}]
- L'unità di misura nel SI è il *Joule* (J) ed equivale allo spostamento di una forza di un Newton per un metro. (nel sistema CGS l'unità è l'*erg* = 1 dyna . cm e 1J =10^7 erg)
- L'energia cinetica ha le stesse dimensioni del lavoro.

Dalla definizione di $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ segue che la $\frac{dE_c}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, variazione dell'energia cinetica nell'unità di tempo è la quantità di lavoro che un macchina (il dispositivo meccanico che applica la forza F) è in grado di fare nell'unità di tempo. Tale lavoro erogato nell'unità di tempo si indica come *potenza* della macchina e si misura in watt ed ha ovviamente le dimensioni di un lavoro su di un tempo:1W=1J /sec. Una macchina potente è in grado di compiere un determinato lavoro in minor tempo di una meno potente. Immagina di dover sollevare un carico ad una altezza h: il lavoro totale (L=mg*h) necessario per innalzarlo non dipende dal tempo impiegato per il trasferimento, tuttavia userò una macchina potente se voglio ridurre il tempo (o aumentare la velocità) dell'operazione.

Teorema delle forze vive

Possiamo anche esprimere la formula su scritta dicendo che l*a derivata dell'energia cinetica, cioè la variazione per unità di tempo dell' energia di un punto mobile materiale è uguale alla potenza della forza applicata*; indicato come il ***teorema delle forze vive*** in forma elementare.

Integriamo adesso la potenza nel tempo tra un punto A e B raggiunti agli istanti t_A e t_B

2a) $$\int_{t_A}^{t_B} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt=\int_{t_A}^{t_B} d\,E_c=E_c(t_B)-E_c(t_A)=\frac{1}{2}mv^2(t_B)-\frac{1}{2}mv^2(t_A)$$

che esprime in *forma finita (o integrale)* lo stesso concetto di prima:
la variazione dell'energia cinetica del mobile fra due istanti è uguale al lavoro della forza agente su di esso.
Attenzione, nel caso di forze **F** dipendenti dal punto e dalla velocità, il lavoro può essere calcolato solo se è nota l'equazione oraria del moto! Se invece la forza dipende *solo dalla posizione* e non dalla velocità, possiamo riscrivere la realzione di sopra riferendoci alle variabili spaziali, e ricordando che **v**.dt = d**s** , considerando A e B i punti nei momenti t_A e t_B:

2b) $$\int_{A}^{B} \vec{F}\cdot d\,\vec{s}=\int_{A}^{B} d\,E_c=E_c(B)-E_c(A)=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2$$

Si enuncia lo stesso teorema anche:

la differenza dell'energia cinetica del mobile nei punti A e B corrisponde al lavoro fatto dalle forze ad esso applicate per spostare il mobile lungo il percorso A->B.
è evidente che, se la forza dipende solo dalla posizione, nel caso di uno spostamento inverso, cioè da B ad A il lavoro cambia di segno. Ricorda un mobile lanciato in alto, qui la variazione di energia cinetica è negativa!
Va anche notato che la relazione 2b) dipende dal cammino, e non dipende dalla legge oraria, anzi *non comporta la conoscenza della legge oraria.* Un mobile in caduta varia la sua energia cinetica tra i punti A e B indipendentemente dal lla velocità con cui si percorre il tratto AB.
Abbiamo escluso le forze dipendenti dalla velocità. Non è molto grave, poiché solo in pochi casi importanti come per la forza magnetica o quella di Coriolì c'è una dipendenza da v, ma in entranbi i casi la forza opera sempre in direzione ortogonale a quella del moto. Quindi il loro lavoro è sempre nullo!
Nel caso delle forze di attrito! Queste sono nulle se la velocità è nulla e se agiscono, agiscono proprio nella stessa direzione e senso opposto della velocità!. É un caso particolare che va trattato a parte, tuttavia il teorema delle *forze vive* vale ancora nella sua prima forma 2a).

Lavoro di più forze

La relazione è lineare e quindi se due forze operano contemporaneamente su di un mobile, il *lavoro totale è la somma dei singoli lavori.* In effetti il lavoro totale può essere nullo anche in presenza di più forze purché la forza netta totale sia nulla!.

Spostamento di una valigia....

Sfruttiamo quanto detto ora giusto per capire la forza **f** che noi facciamo nello spostare una valigia da un punto A sul pavimento di casa, per depositarla in un punto B sopra un armadio di altezza h.

3) $$\int_A^B (-m\vec{g}+\vec{f})\cdot d\vec{s} = \int_A^B d\,E_c = 0$$

Il lavoro totale delle forze applicate è nullo! Notate che nel sollevare la valigia dobbiamo applicare una forza **f** pari al peso della valigia , ma di senso opposto e magari solo per un attimo leggermente più intensa per mettere la valigia in moto verso l'alto. Il lavoro totale delle forze in gioco è nullo, ma in effetti il lavoro della forza peso è negativo, mentre il nostro lavoro fatto contro la forza peso è positivo e compensa quello della forza di gravità tanto bene che la velocità finale del nostro mobile resta nulla.

Calcoliamo il lavoro fatto dalla forza di gravità. Qui la forza di gravità è costante e dovrebbe essere abbastanza facile integrare il lavoro lungo un cammino che porta la nostra valigia da 0 a h. Intanto visto che conta nello spostamento la direzione parallela a g, possiamo immaginare di scomporre ogni spostamento elementare d**s** in una componente z parallela a g ed una conponente x orizzontale perpendicolare a g.

4) $$\int_0^h -m\vec{g}\cdot d\vec{s} = \int_0^h -m\,g\,dz = -mgh$$

Il nostro lavoro sarà lo stesso ma di segno opposto, L= mgh, per sollevare la valigia ! In numeri con una massa di =50 Kg, h=2 m, e g=10 m/s^2 segue L= 50*10* 2 = 1000 J.

Se immaginate di fare lo spostamento in un secondo, dovete impiegare una potenza di 1.0 KW , quella di una stufetta (ma solo per un secondo...altrimenti rischiate di sudare troppo!).

Quello che si scopre, analizzando la 4), è che il lavoro fatto dalla forza di gravità, quando si sposta una valigia da un posto all'altro *dipende solo dal dislivello. Non dipende dal cammino!.*

Possiamo immediatamente sfruttare il concetto appena espresso per domandarci con che velocità arriva un sasso a terra se parte da una altezza h= 60 mt., sempre dalla cime della stessa torre? Qui l'unica forza che agisce è quella di gravità e il sasso si sposta (cade) nello stesso senso di g e quindi il lavoro del campo è positivo.

5) $$mgh=\frac{1}{2}mv^2 \quad v=\sqrt{2gh}=\sqrt{(2*10*60)}=34.64 \quad m/sec^2$$

D'altra parte possiamo anche chiederci a che altezza arriva un sasso che parte lanciato verso l'alto con velocità 34.64 m/sec^2 ? Il lavoro, rispetto al caso della caduta, cambia solo di segno, la variazione della energia cinetica è negativa, ed il risultato non può che essere 60 m!

Se il mobile si muove anche orizzontalmente, possiamo trovare ugualmente il punto più alto della traiettoria banalmente poiché l'energia cinetica è una forma quadratica della velocità , per esempio vedi il riquadro:

6)

$\vec{v}=v_x\hat{x}+v_z\hat{z}$

l'energia cinetica in basso sul terreno e'

$E_c=\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}mv_z^2$

nel punto piu' alto dove v_z *e' nulla, e* v_x *e' la stessa di prima*

$E_{su}=\frac{1}{2}mv_x^2$

da cui il lavoro della forza gravita' e'

$-mgh=E_{su}-E_c=-\frac{1}{2}mv_z^2$

da cui ri ricava h usando solo la parte di energia cinetica corrispondente all'asse z

quindi quello che conta è la velocità iniziale verticale che contribuisce alla parte di energia cinetica che cambia da un livello all'altro, mentre la velocità orizzontale dà un contributo costante, ma ininfluente ai fini del nostro calcolo.

Sistema a più corpi

La formula delle forze vive vale anche per più corpi

7) $$\int_{t_A}^{t_B}\sum_1^N \vec{f}_i\cdot\vec{v}_i dt=\int_{t_A}^{t_B} d\sum_1^N\frac{1}{2}m_i v_i^2=\int_{t_A}^{t_B} d\sum_1^N E_{ic}=E_c(t_B)-E_c(t_A)$$

la variazione totale della energia dipende evidentemente dalla variazione delle singole energie.

L'energia è un concetto

Energia è un concetto astratto, ma fondamentale per la comprensione del comportamento della natura. Esso non individua un oggetto fisico, ma dà una

informazione quantitativa dello stato di "movimento" senza entrare nei dettagli dinamici dei parametri che rappresentano un dato sistema fisico. Per esempio l'energia cinetica di un sistema è la somma di tutte le energie cinetiche di cui sono portatori tutti i suoi punti materiali.
Maggiore è l'energia, più agitato è il sistema in esame, mentre non sappiamo nulla sulle direzioni di moto e intensità delle singole particelle!

L'energia cinetica è una delle forme dell'*energia* ,forse la più comune, ma in seguito ne troveremo altre, altrettanto importanti nel descrivere i vari fenomeni della fisica.

Nota: L'energia cinetica fra l'altro non è una grandezza assoluta, essa dipende dal sistema di riferimento, poiché la velocità dipende dal sistema di riferimento! Per esempio una particella con velocità v, è ferma in un sistema di riferimento che trasla con la stessa velocità della particella e quindi in quel sistema la sua energia cinetica è nulla! É come la quantità di moto!

Costante del moto

Prendiamo una pallina in campo gravitazionale e lasciamola cadere da una altezza h. Abbiamo appena dimostrato che la sua energia cinetica finale è pari a mgh, ma abbiamo anche dimostrato che se la stessa pallina venisse lanciata dal basso con la stessa energia cinetica diretta verso l'alto, salirebbe giusto fino all'altezza h! è il caso di un rimbalzo *perfettamente elastico* sul pavimento, la pallina si ferma per un attimo nell'urto con il pavimento, inverte il senso di moto e poi inizia la risalita con la stessa velocità in modulo di quella in arrivo. Per il momento accettiamo, come fatto sperimentale indiscutibile, quanto avviene senza entrare in merito di quanto avviene nell'attimo del contatto pallina pavimento,
L'energia cinetica aumenta quando scende ed è massima alla fine della corsa sul pavimento, diminuisce quando sale ed è nulla nel punto più alto dove per un attimo è ferma! E come se la pallina si caricasse di energia cinetica nello scendere, mentre la perdesse nel salire fino ad azzerarla! ma da chi riceve energia e a chi poi la riceve? E anche chiaro che se non avessimo rallentamenti dovuto agli attriti in gioco, i rimbalzi si ripeterebbero uguali per l'eternità.
Dal teorema delle forze vive sappiamo che l'energia cinetica aumenta poiché la forza di gravità fa un lavoro positivo sul mobile in discesa, o diminuisce in salita quando il lavoro è negativo.

8)
$$\int_{z_1}^{z_2} -m\vec{g}\cdot\vec{ds} = mgz_1 - mgz_2 = E_c(z_2) - E_c(z_1) = \frac{1}{2}mv^2(z_2) - \frac{1}{2}mv^2(z_1)$$
$$\text{da cui ricaviamo}$$
$$\frac{1}{2}mv^2(z_1) + mgz_1 = \frac{1}{2}mv^2(z_2) + mgz_2$$

e cioè la $E=\frac{1}{2}m\,v^2(z_1)+mgz_1$ quantità che chiameremo energia totale della pallina ha lo stesso valore in ogni punto z, come si capisce dalla 8) in cui i punti z sono arbitrari. Questa quantità non dipende dalla posizione e resta costante durante tutti i rimbalzi, pertanto *è una costante del moto*.

Questa energia totale contiene un termine che corrisponde all'energia cinetica e un termine che dipende solo dalla posizione della pallina nello spazio. Quest'ultimo è un termine che ha la stessa genesi del lavoro e dipende solo dal cammino percorso dal mobile. In particolare il termine mgz è il lavoro che la forza fa sul sasso nel portarlo dal livello z a zero. É quindi una misura dell'energia che il mobile ha perso per raggiungere *la posizione in* z_1*,* è quindi una *energia di posizione.* Abbiamo praticamente scoperto *dove va o da dove viene* l'energia cinetica della pallina: *l'energia cinetica si trasforma in energia posizionale o l' energia posizionale si trasforma in energia cinetica*. L'energia posizionale è un'altra forma importante di energia che definiremo ancor meglio in seguito.

Nel capitolo 12, studieremo l'oscillatore armonico un altro caso simile

9) $$E_0=\frac{1}{2}k\,x^2+\frac{1}{2}m v^2$$

dove l'energia totale dipende ancora dalla somma della energia cinetica più una energia posizionale legata alla costante elastica.

Certamente non è un caso, c'è qualche cosa di più fondamentale dietro queste coincidenze, che vedremo più avanti.