novembre 2010
Cap.09.v.10

Fisica _I

Primo semestre

Meccanica

Sistemi di riferimento

Table of Contents

Sistemi di riferimento

Due sistemi di riferimento inerziali differiscono per un moto rettilineo uniforme, ma anche per un orientamento diverso degli assi. L'orientamento in effetti corrisponde solo ad una rotazione del sistema di riferimento e non può avere grandi conseguenze cinematiche, pertanto *considieriamo per il momento due sistemi con assi paralleli* che traslano l'uno rispetto all'altro. Anzi se consideriamo uno di essi come sistema di riferimento "assoluto", per esempio quello solidale con noi, diremo che l'altro trasla rispetto al nostro di velocità $\mathbf{v}_0$. Un nostro amico, solidale con l'altro sistema, affermerà con uguale sicurezza di essere in un sistema assoluto e che il nostro invece sta traslando rispetto a lui di velocità $-\mathbf{v}_0$. Se poi prendiamo in esame un terzo sistema con velocità di traslazione ancora diversa e che trasla rispetto a noi di velocità $\mathbf{v}_1$, il nostro amico affermerà che il terzo sistema si muove rispetto a lui con velocità $-(\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_1)$.
Conclusione, quello che conta non è la velocità assoluta di un mobile, ma la velocità relativa che il mobile ha rispetto al nostro sistema di riferimento.

Sistemi in moto relativo traslatorio.

Fissiamo un sistema di riferimento O che immaginiamo il sistema di riferimento base rispetto al quale il moto di un mobile è descritto da una legge oraria $\mathbf{R}(t)$, ed un sistema di riferimento Ω che si muove con velocità $\mathbf{v}_T$ rispetto al primo e si conosce la legge oraria dello stesso mobile e cioè $\mathbf{r}(t)$ rispetto al sistema Ω. Come sono legati i due moti?

Ecco:
In ogni istante la posizione del punto mobile visto da O si esprime in funzione di **R** (t) e del vettore spostamento $\mathbf{\Omega}_O$(t) (come è evidente anche da un banale disegno) che congiunge l'origine di O con quella di Ω (sistemi di coordinate cartesiani) :

$$\vec{R}(t)=\overrightarrow{P\Omega}(t)+\overrightarrow{\Omega_O}(t)$$

1) $$\text{ovvero}$$

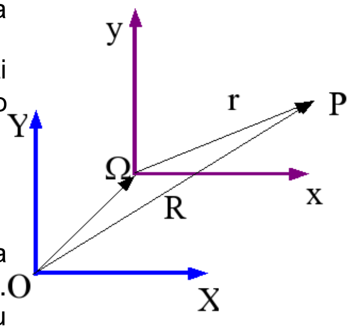
$$\vec{R}(t)=\vec{r}(t)+\overrightarrow{\Omega_O}(t)$$

La relazione è quasi ovvia, ma conviene notare anche che la formula di sopra è valida poiché il *tempo t è assoluto,* nel senso che è lo stesso in tutti i sistemi di riferimento!! Rivedremo questo punto più avanti.

Dalla 1) deriva immediatamente la relazione tra le velocità viste dai due sistemi di riferimento.
Derivando i due membri della 1) si ottiene

2) $\vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_T$

$\mathbf{v}_r$ è la velocità relativa del punto rispetto al sistema mobile. L'ultimo termine $\mathbf{v}_T$, è la velocità di traslazione del sitema Ω rispetto a O ed è generalmente chiamata ***velocità di trascinamento.***
Per capire meglio, visualizziamo in un disegno gli spostamenti elementari che avvengono in un intervallo di tempo infinitesimo Δt. Lo spostamento elementare visto da O



3) $$\Delta\vec{R}=\Delta\vec{r}+\Delta\overrightarrow{\Omega_O}$$

è la somma di due spostamenti elementari, il primo la traiettoria vista in Ω e il secondo equivalente allo spostamento di Ω rispetto a O. Cioè il moto può pensarsi come decomposto nei due movimenti su indicati percorsi uno dopo l'altro senza un ordine preciso.
Il rapporto di questi spostamenti elementari con Δt giustificano la 2) ed il termine di velocità di trascinamento. Se si deriva ancora si trova la relazione tra le accelerazioni, quella rispetto al sistema fisso, la relativa e quella di trascinamento.
L'accelerazione relativa al sistema in moto risulta identica a quella rispetto al sistema fisso se i due sistemi differiscono solo per un moto rettilineo uniforme!

4) $$\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_T$$

Ma c'è di più!

Dalla 3) si deriva la *composizione delle velocità* che come vettori, evidentemente, si sommano con la regola del parallelogrammo. Cosi' il moto in una qualsiasi direzione può sempre essere pensato come la composizione di due moti indipendenti, se sul piano (tre nello spazio) che si svolgono in due direzioni diverse e magari ortogonali tra loro (ma non è obbligatorio, la somma del parallelogrammo funziona sempre!). Quei due moti sono in effetti le componenti o le proiezioni dell'unico moto sulle suddette direzioni, per esempio le componenti sugli assi del sistema di riferimento.
Del resto un vettore velocità è definito dalle sue componenti sui tre assi, di cui conosciamo i versori rispetto al sistema fisso e quindi:

$$\vec{v}_r = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$$

Naturalmente possiamo scrivere la 2) anche in componenti (cioè tre equazioni, uno per asse) :

5)
$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{rx}(t) + v_{Tx} \\ v_y(t) &= v_{ry}(t) + v_{Ty} \\ v_z(t) &= v_{rz}(t) + v_{Tz} \end{aligned}$$

Derivando ancora una volta si troveranno le relazioni tra le accelerazioni come già indicate in 3a) e notiamo ancora che l'accelerazione non dipende dal sistema di riferimento se i due sistemi sono in moto relativo rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro, cioè se v_T è costante la sua derivata è nulla!.

Accelerazione costante

Proprio in questo ultimo caso ... pensate un po'......un mobile in quiete nel sistema di riferimento O (che consideriamo inerziale) non appare soggetto a forze ad un osservatore solidale con O. Lo stesso mobile visto invece da un abitante del sistema Ω in accelerazione costante $\mathbf{a}_T$ verrà descritto, come un sasso che "cade", con una accelerazione $-\mathbf{a}_T$; che è poi l' accelerazione che esperimenta l'osservatore in Ω!!!!! In effetti egli crederà di essere soggetto ad una *forza apparente* proporzionale alla sua massa, $\mathbf{F}_a = -m\mathbf{a}_T$, che tende a trascinarlo costantemente verso una direzione che egli potrebbe chiamare "basso". Ricordate quello che accade quando vi trovate in un auto in accelerazione... vi sentite schiacciare sul sedile se la macchina accelera o proiettati in avanti se la macchina è in frenata!
L'analogia con la forza di gravità in una regione limitata di spazio, è notevole. Molto più tardi di Galileo, il signor Einstein formulò la teoria di relatività generale che fece di quella analogia un postulato fondamentale......

Relatività Galileana

In un sistema di riferimento inerziale O l'equazione del moto di un mobile di massa m è $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ dove $\mathbf{F}$ è la forza risultante di tutte le *forze vere* applicate sul mobile derivanti dalla *interazione* di questo con tutti gli altri corpi del ambiente in cui esso è immerso.
Se volessimo descrivere il moto visto nel sistema Ω in accelerazione $\mathbf{a}_T$, dovremmo tener conto della 7) e cioè della *accelerazione di trascinamento*. Cosi'

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{a}_r + m\mathbf{a}_T$$

che possiamo scrivere anche come

8) $$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_T = m\mathbf{a}_r$$

e se definiamo una forza $\mathbf{F}_\Omega = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_T$ la 8) diventa formalmente

$$\mathbf{F}_{\Omega} = m\mathbf{a}_{\mathbf{r}}$$

che sembra la **II** legge. Tuttavia, in questo sistema non inerziale, la forza $\mathbf{F}_{\Omega}$ non è quella "vera", ma tiene conto anche di alcune *forze che diremo apparenti o fittizie*.
Se invece la accelerazione di trascinamento $\mathbf{a}_T$ fosse nulla, la 9) corrisponderebbe perfettamente alla equazione scritta in O e noi , visto l'indenticità della dinamica, *non avremo modo di distinguere quale dei due sitemi sia quello in quiete assoluta.*
I sistemi inerziali sono equivalenti! Questo concetto, ricordo, impone una relatività tra i vari sitemi di riferimento inerziali detta *relatività galileiana*.

Problema: Una sfera è appoggiata su di un piano liscio di un tavolo solidale con un vagone di un treno. Il treno parte e si accelera con accelerazione costante pari a 1 m/s^2. Descrivere il moto della pallina sia nel sistema di riferimento solidale con la stazione, che nel sistema solidale con il vagone.

Esercizio

Ricavare le regole di trasformazione tra due sistemi per esempio bidimensionali, uno fisso e l'altro in moto uniforme ruotato di un angolo α.
Ricorda che se $\mathbf{u}_x$ e $\mathbf{u}_y$ sono i versori degli assi del sistema in moto rispetto a quello fisso,le componenti del vettore **r** (del sistema mobile) rispetto al sistema fisso sono ($\mathbf{u}_x.\mathbf{r}$,$\mathbf{u}_y.\mathbf{r}$).

Derivata di un vettore (richiamo)

Prima di continuare ricordiamo la nostra conoscenza sui vettori.
Già nei precedenti capitoli abbiamo avuto l'occasione di discutere la derivata di un vettore sempre giacente sul piano xy, non costante, nè in intensità , nè in direzione,

9)
$$poniamo \quad \vec{R}=\rho\hat{R} \quad dove \;\; \hat{R} \;\; e' \;\; il \;\; versore \;\; di \;\; \vec{R}$$
$$\frac{d\vec{R}}{dt}=\frac{d\rho}{dt}\hat{R}+\rho\frac{d\hat{R}}{dt}=\frac{d\rho}{dt}\hat{R}+\rho\,\omega\,\widehat{R_n}$$

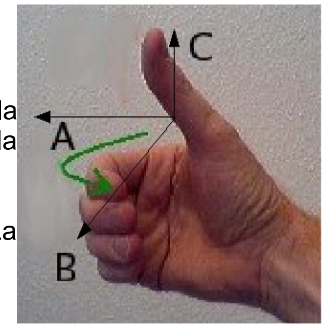
Il primo termine deriva la variazione della intensità del vettore, mentre il secondo termine tiene conto della variazione del vettore in direzione e quindi è la derivata del versore (unitario e costante in modulo) che fissa la direzione ed il senso di **R.** Come abbiamo imparato nei capitoli passati, la derivata del versore porta $\omega\mathbf{R}_n$ dove il versore $\mathbf{R}_n$ giace sul piano ed è ruotato di un angolo di 90 gradi rispetto ad **R.**

Prodotto Vettoriale

La definizione di prodotto vettoriale

*Il prodotto vettoriale tra due vettori **A** e **B** è un vettore **C** perpendicolare al piano individuato da **A** e **B**, ha per modulo il prodotto dei moduli moltiplicato per il seno dell'angolo compreso tra **A** e **B** ed il senso definito in modo che guardando i due vettori da **C** il vettore **A** ruota in senso antiorario per sovrapporsi a **B**.*

(vedi anche la regola del cavatappi o la regola della mano destra!)



Questa è la regola della mano destra: si punta il palmo della mano nella direzione di **A** e si chiudono le dita verso **B** per fare il pugno; **C** ha la direzione del pollice!.

Il prodotto vettoriale si può calcolare anche in componenti cartesiane. La sua definizione, dati i due vettori A e B è:

11)

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$$

$$di\, componenti$$

$$Cx=Ay\,Bz-Az\,By$$

$$Cy=Az\,Bx-Ax\,Bz$$

12)

$$Cz=Ax\,By-Ay\,Bx$$

se il vettore A è parallelo a z , ha solo la componente z non nulla, e pertanto solo Cx e Cy sono differenti da zero.
Se esprimiamo, per esempio, le componenti di **A** e **B** in funzione degli angoli θ e ϕ

$$\vec{A}=(0,\quad 0,\quad \omega)\qquad parallelo\ a\ zeta...$$

$$\vec{B}=(\rho\sin(\theta_b)\cos(\phi_b),\quad \rho\sin(\theta_b)\sin(\phi_b),\quad \rho\cos(\theta_b))\qquad generico$$

secondo la definizione di prodotto vettoriale 11)

12) $$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=(-\omega\rho\sin(\theta_b)\sin(\phi_b),\quad \omega\rho\sin(\theta_b)\cos(\phi_b),0)$$

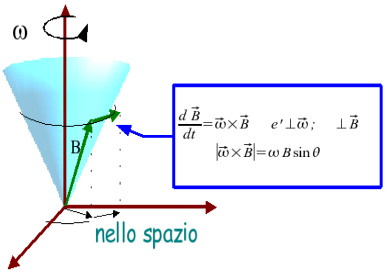
che ha per modulo **|C|** = $\omega\rho\sin(\theta_b)$ che poi è il seno tra **A** e **B**.

Un significato geometrico? Il modulo di **|C|** è equivalente all'area del parallelogrammo che ha per lati **A** e **B** ! Dimostrare.

Derivata di un vettore (rivisitato)

In forma compatta, si può esprimere la derivata di un vettore sfruttando la definizione (vedi qui sopra) di *prodotto vettoriale o prodotto esterno.*

10) $$\frac{d\vec{B}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{B}$$



dove si è introdotto il vettore *velocità angolare*, di intensità ω con direzione corrispondente a quella dell'asse di rotazione ed il senso fissato in modo che guardando il vettore B da ω si veda *ruotare in senso antiorario* .

Sfruttiamo adesso il concetto di prodotto vettoriale e applichiamolo alla derivata di un vettore in generale.

$$\vec{R}=\rho\hat{R} \qquad dove\ \hat{R}\ \ e'\ il\ versore\ di\ \ \vec{R}$$
$$\frac{d\vec{R}}{dt}=\frac{d\rho}{dt}\hat{R}+\rho\frac{d\hat{R}}{dt}=\dot{\rho}\hat{R}+\rho\vec{\omega}\wedge\hat{R}$$

Immaginiamo che $\boldsymbol{\omega}$ sia un vettore il cui modulo indica la velocità angolare di rotazione del mobile attorno all'asse individuato da omega stesso, mentre il suo senso indica la parte da cui guardare il mobile per vederlo ruotare in senso antiorario.
Per esempio il moto di un mobile, che percorre a velocità v in senso antiorario una circonferenza giacente su xy, di raggio r e centrata in (0,0,0), è descritto da un vettore $\boldsymbol{\omega}$ di modulo v/r giacente sull'asse **z** orientato nel senso crescente delle coordinate.
Con questo in mente scopriamo che il prodotto vettoriale $\vec{\omega}\wedge\vec{R}=\rho\,\omega\sin(\theta)\hat{R}_n$ è un vettore che risponde alla definizione di prodotto vettoriale se $\boldsymbol{R}_n$ è perpendicolare al piano individuato da $\boldsymbol{\omega}$ e ***R*** ed è orientato in modo che dalla sua cima si veda $\boldsymbol{\omega}$ sovrapporsi a ***R*** con una rotazione in senso antiorario.
D'altra parte nel caso che l'angolo θ , tra $\boldsymbol{\omega}$ e ***R***, sia a $\pi/2$ ci si riduce a $\rho\,\omega\,\hat{R}_n$ come appare nella nostra descrizione del moto che si pensava avvenire sul piano xy.

L'ovvia generalizzazione, come già scritto, della derivata di un vettore è

$$\frac{d\rho\hat{R}}{dt}=\frac{d\rho}{dt}\hat{R}+\rho\frac{d\hat{R}}{dt}=\frac{d\rho}{dt}\hat{R}+\vec{\omega}\wedge\rho\hat{R}$$

$$ovvero\ per\ \rho\ \ costante\ \frac{d\vec{R}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{R}$$

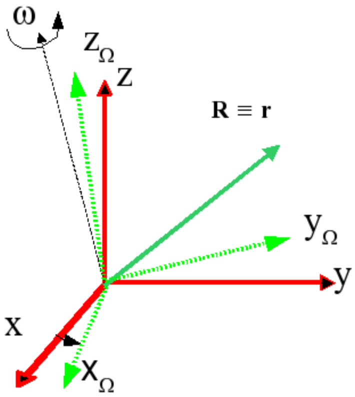
Sistemi in rotazione

Supponiamo che l'origine del sistema di riferimento Ω coincida costantemente con quello di O, mentre il sistema Ω ruota attorno ad un asse di rotazione fisso, che passa per l'origine comune, con velocità angolare costante ω. Per semplicità immaginiamo l'asse di rotazione lungo z.

La reazione 1) va rivisitata e espressa meglio poiché gli assi dei due sistemi non sono più paralleli durante il moto. Si assume R come il vettore PO nel sistema fisso, r come PΩ nel sistema rotante.

$$\vec{R}(t)=\vec{r}(t)+\overrightarrow{\Omega_O} \quad \textit{si riduce a} \quad \vec{R}(t)\equiv\vec{r}(t) \quad \textit{se le origini coincidono}$$

r coincide geometricamente con **R**, ma va espresso in funzione delle coordinate Ω e dell'angolo di rotazione tra i due sistemi ! Vediamo fra poco come fare!



Un punto **P** è rappresentato dal vettore posizione **R**=(X,Y,Z) rispetto al sistema di riferimento O, oppure dal vettore **r** di coordinate (x,y,z), coordinante definite nel sistema ruotante che non coincidono con quelle del sistema fisso, ma sono legate dall'angolo di rotazione ϕ tra i due sistemi di coordinate. Come mettere in relazione le coordinate relative al sistema ruotante con quelle del sistema fisso?
Noi dobbiamo esprimere **R**= **R**(**r**,ϕ). Quale è il legame tra le due rappresentazioni?

Prendiamo la componente di x di **r** , che giace evidentemente istante per istante sul versore $\mathbf{x}_\Omega$ del sistema ruotante, come visto da O. (Il versore $\mathbf{x}_\Omega$,che è costante in Ω, visto da O è funzione del tempo poiché $\mathbf{x}_\Omega$ ruota rispetto ad O e quindi funzione dell'angolo ϕ di rotazione tra i due sistemi !).
Ricordando la composizione dei vettori, possiamo sempre esprimere **R** come somma dei tre versori degli assi di Ω .

13)

$$\vec{r}\equiv(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega) \quad in\ \Omega$$
esprimo il vettore in O come somma di tre vettori giacenti sui versori degli assi di Ω espressi in coordinate del sistema fisso
$$\vec{R}\equiv x_\Omega\hat{x}_\Omega+y_\Omega\hat{y}_\Omega+z_\Omega\hat{z}_\Omega$$

Allora **r** pur costante in Ω, appare ruotare in O come somma dei tre versori ortogonali di Ω e di lunghezza (x_Ω,y_Ω,z_Ω), tutti ruotanti in O , in perfetta sincronia, con velocità **ω** .
Quindi, per fissare le idee notiamo bene che ***R,*** *che coincide fisicamente con* ***r****, si esprime in funzione delle componenti di* ***r*** *e in funzione dei versori degli assi di Ω visti da O.*

Quanto vale la velocità ?

Deriviamo direttamente $\mathbf{R}_\Omega$, supponendo che il punto si muova comunque anche rispetto ad Ω.
14)

$$\vec{v}=\frac{d\vec{R}}{dt}=\frac{dx_\Omega}{dt}\hat{x}_\Omega+\frac{dy_\Omega}{dt}\hat{y}_\Omega+\frac{dz_\Omega}{dt}\hat{z}_\Omega+x_\Omega\frac{d\hat{x}_\Omega}{dt}+y_\Omega\frac{d\hat{y}_\Omega}{dt}+z_\Omega\frac{d\hat{z}_\Omega}{dt}$$
$$\vec{v}=\frac{d\vec{R}}{dt}=v_{x\Omega}\hat{x}_\Omega+v_{y\Omega}\hat{y}_\Omega+v_{z\Omega}\hat{z}_\Omega+x_\Omega\vec{\omega}\wedge\widehat{x_\Omega}+y_\Omega\vec{\omega}\wedge\widehat{y_\Omega}+z_\Omega\vec{\omega}\wedge\widehat{z_\Omega}$$

$$\vec{v}=\vec{v_{\Omega r}}+\vec{\omega}\wedge\vec{r}=\vec{v_{\Omega r}}+\vec{v_T}$$

La velocità in O è la somma della velocità $v_{\Omega r}$ (detta poi anche v_r), la velocità di P rispetto al sistema rotante, più la velocità di trascinamento **ωxr** che dipende dalla velocità angolare e dal raggio posizione che congiunge Ω con il punto P.
Nel caso di un moto piano su (x,y) (asse di rotazione coincidente con l'asse z), il termine di trascinamento corrisponde semplicemente a $\mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = \omega\rho\mathbf{T}$ che dipende dalla distanza dal punto dall'origine ed ha la direzione della tangente alla circonferenza di raggio ρ.

Quale è l'accelerazione?

Deriviamo ancora una volta; partiamo dalla 14:

15) $$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}_r}{dt}+\frac{d\vec{v}_T}{dt}$$

ma procediamo per pezzi ricordando che i vettori in Ω vanno pensati come composizione

16) $$\frac{d\vec{v}_r}{dt}=d\,\frac{v_{x\Omega}\widehat{x_\Omega}+v_{y\Omega}\widehat{y_\Omega}+v_{x\Omega}\widehat{z_\Omega}}{dt}=\vec{a}_r+\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r$$

$$\frac{d\vec{v}_T}{dt}=\frac{d\vec{\omega}\wedge\vec{r}}{dt}=\frac{\vec{\omega}\wedge d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\wedge(\vec{v}_r+\vec{\omega}\wedge\vec{r})$$

che sommando e ricordando la 13

16) $$\vec{a}=\frac{d\vec{v}_r}{dt}+\frac{d\vec{v}_t}{dt}=\vec{a}_r+2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r})$$

$$\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r})=-\omega^2\vec{r}+(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}$$

Una struttura piuttosto complessa che indica quanto possa essere complicata la equazione nel moto in un sistema di riferimento non inerziale.
Per esercizio visualizzare in un disegno il secondo termine, quello con il doppio prodotto vettoriale, rispetto ad **R** e **ω**. (vedi la figura più sotto)
Il primo termine è l'accelerazione in Ω , il terzo termine è un accelerazione di trascinamento che dipende dalla posizione. Il secondo termine è chiamato *accelerazione di Coriolis*, e sorge solo se il mobile è in movimento.

L'accelerazione di trascinamento è connessa alla *accelerazione centripeta* che è legata alla forza apparente *centrifuga*.

Partiamo dalla equazione **F** = m**a** scritta nel sistema inerziale e sostituiamo m**a** con la espressione scritta in funzione dei parametri nel sistema ruotante con velocità angolare ω, quindi portiamo al primo termine i termini connessi con l'accelerazione di trascinamento.

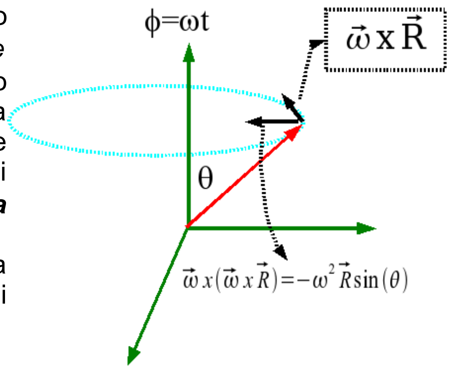
17)

$$
\begin{aligned}
&\vec{F}-2\mathrm{m}\,\omega\wedge\vec{v}_r-m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r})=m\vec{a}_r\\
&con\\
&\vec{F}\,'=\vec{F}-2\mathrm{m}\,\omega\wedge\vec{v}_r-m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r})\\
&\ allora\\
&\vec{F}\,'=m\vec{a}_r\\
&\qquad\quad \ldots ma\ a\ che\ prezzo\,??
\end{aligned}
$$

L'osservatore del sistema ruotante potrebbe scrivere l'equazione del moto tenendo conto delle *forze apparenti (inerziali o fittizie)* proporzionali alla massa: la *forza di Coriolis* e la *forza di trascinamento* che come si vede dalle 17) sono ambedue perpendicolari all'asse di rotazione.
F=**ma** vale anche in un sistema non inerziale purché si tenga conto delle *forze fittizie!*.
Questo è quello che accade nel sistema di riferimento "terra"!

La forza centrifuga

Per capire l'origine delle forze apparenti lavoriamo in un sistema di riferimento inerziale ed uno che ruota rispetto a questo attorno all'asse Z. Il moto, supponiamo che avvenga sul piano x,y.
Consideriamo inizialmente un punto fisso sul piano ruotante che visto da O descrive un cerchio di raggio ρ con velocità angolare ω attorno all'asse z. L'osservatore in O non ha difficoltà nel cscoprire che sul punto agisce una *accelerazione centripeta* di intensità $-\omega^2\rho$ *che deriva dalla traiettoria curva*. L'osservatore in Ω vede il punto fermo, ma nota anche che per mantenerlo a distanza fissa dall'origine deve legarlo con un cavetto che resta ben teso e scopre che la tensione o la forza di trazione è proprio di intensità $-m\omega^2\rho$ per bilanciare una *forza apparente* ***centrifuga*** di segno contrario che tende a far allontanare il punto mobile. Anzi egli afferma che in ogni punto del piano agisce una forza simile, *centrifuga* , che lui stesso sperimenta appena si allontana dal centro. Vediamo meglio......



Dalla 17) l'ultimo termine delle definizione della forza deriva da un doppio prodotto vettoriale che va eseguito nell'ordine indicato (!), prima il prodotto **ω**x**R** ed il risultato moltiplicato di nuovo per ω**.**

Per fare il conto ricordare che $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

Ora analizziamo direttamente il doppio prodotto vettoriale $-m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{R})$, nell'ipotesi su indicata di rotazione attorno a z, il prodotto in parentesi ha modulo ωρ e la sua direzione è quella della tangente al cerchio, il senso è definito dalla direzione di rotazione: $\mathbf{v}_{tg}=\omega\rho\mathbf{T}$ (**T** versore della tangente). Il secondo prodotto è tra vettori ortogonali, uno lungo z e l'altro parallelo alla tangente che danno come risultato finale un vettore perpendicolare a z e **T** , sul piano x,y e parallelo al raggio, con il senso, visto il segno meno, verso l'esterno. Quindi, visto il segno meno, appare una *forza apparente o fittizia* che, come già detto, tende ad allontanare il punto mobile dal centro; la chiameremo *forza centrifuga.* Questa forza, che sembra reale ad un osservatore in Ω, di fatto è una

forza che nasce dinamicamente come reazione a quella forza reale (tensione del cavetto) che agisce perpendicolarmente *alla traiettoria del mobile per farle cambiare la direzione.*
Se il punto mobile viene liberato dal filo che lo trattiene a distanza r fissa in Ω, l'osservatore in O lo vedrà partire nella direzione fissata dalla tangente al momento del rilascio e con velocità costante pari a $\omega\rho$. L'osservatore di Ω vedrà il mobile descrivere una traiettoria complessa che non coincide, se non nel primo istante, con la direzione della forza (apparente) centrifuga, né tanto meno con la retta che passa per l'origine. In effetti il mobile sembrerà allontanarsi con moto elicoidale.

La forza di Coriolis, come nasce?

<u>I caso</u>

Ritorniamo al sistema O e supponiamo che il nostro mobile sia invece vincolato su di una rotaia rettilinea che passa per l'origine e ruota sul piano x,y con velocità angolare ω attorno a z.
In questo caso l'osservatore di Ω vedrebbe il mobile, una volta liberato dal cavetto, allontanarsi lungo la rotaia con una velocità radiale v_r crescente e determinata punto per punto dalla sola forza centrifuga (risolvere il moto!), dato che la forza di Coriolis, che, per definizione di prodotto vettoriale è perpendicolare alla velocità e quindi alla rotaia, non può contribuire alla variazione del moto.
Eppure questa forza, pari in modulo a $2m\omega v_r$, che preme trasversalmente sulla rotaia, dovrà essere bilanciata da una forza di reazione vincolare che mantiene il mobile sulla rotaia.

<u>Rivediamo in O.</u>

Supponiamo che il punto si allontani dal centro lungo **r** a velocità costante $\vec{v}_r = \dot{\rho}\,\hat{\rho}$
come nasce l'accelerazione di Coriolis?

Ci sono due contributi , il primo dipende dalla variazione della componente tangenziale della velocità dovuto al fatto che il mobile attraversa punti con velocità *radiali diverse* e il secondo semplicemente dalla variazione della *direzione di moto del mobile. S*criviamo la velocità in O come somma di due componenti, quella radiale ***v**$_r$* e quella tangenziale ***v**$_T$*, che è poi quella di trascinamento.

18)
$$\begin{aligned}
&\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_T = \vec{v}_r + \vec{\omega}\wedge\vec{\rho}\\
&\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}_r}{dt} + \frac{d\,\vec{v}_T}{dt} = \dot{\rho}\frac{d\,\hat{\rho}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\frac{d\,\vec{\rho}}{dt}\\
&\vec{a} = 2\,\vec{\omega}\wedge\dot{\vec{\rho}} - \omega^2\vec{\rho} = \vec{a}_c + \vec{a}_T\\
&con \quad \vec{a}_c \perp \rho
\end{aligned}$$

che coincide in modulo al valore della accelerazione di Coriolis che troviamo partendo dal prodotto vettoriale che la definisce nelle 17).

Quindi per l'osservatore in O ci sono due forze che la rotaia applica alla pallina se in moto, una che accelera trasversalmente la pallina in modo da mantenerla al pari con la velocità della rotaia nel punto in cui è, la seconda, sempre perpendicolare alla direzione della velocità (quindi anche alla rotaia) forza la pallina a variare continuamente la direzione del moto.

Queste reazioni dinamiche in Ω sono interpretate da O come forze apparenti.

II caso

Supponiamo adesso che il mobile sia vincolato su di una traiettoria circolare di raggio r, e per semplicità si muova di velocità angolare α costante rispetto al sistema Ω .

18)

In questo caso l'accelerazione di Coriolis è il pezzo mancante che va aggiunto alla accelerazione centripeta vista in Ω e a quella di trascinamento per giustificare l'accelerazione totale vista da O (L' accelerazione centripeta è quadratica con la velocità angolare!).
Scopriamo che il termine di Coriolis giustifica una forza apparente che si somma alla forza centripeta calcolata da Ω per ruotare il vettore velocità ad una velocità angolare maggiore di quella corrispondente alla sola rotazione del sistema di riferimento non inerziale.

III caso

In generale la velocità può essere sempre scomposta in due componenti perpendicolari, quella lungo il raggio e quella lungo la tangenziale. La forza di Coriolis si giustifica come una sovrapposizione dei contributi su discussi.

$$\vec{v}_t=\vec{\omega}\times\vec{\rho} \qquad \vec{a}_t=-\omega^2\vec{\rho}$$
$$\vec{v}_\Omega=\vec{\alpha}\times\vec{\rho} \qquad \vec{a}_\Omega=-\alpha^2\vec{\rho}$$

Nota: La accelerazione di Coriolis <u>non è considerata una accelerazione di trascinamento</u> poichè essa di fatto è nulla in ogni punto del sistema di riferimento se il mobile non si muove.

$$\vec{v}=(\vec{\omega}+\vec{\alpha})\times\vec{\rho} \qquad \vec{a}=-(\omega+\alpha)^2\vec{\rho}$$

$$\vec{a}=-\alpha^2\vec{\rho}-\omega^2\vec{\rho}-2\,\omega\,\alpha\,\vec{\rho}$$
$$\vec{a}=\vec{a}_\Omega+\vec{a}_t+\vec{a}_c$$

Problemino: pensate ad un treno che corre su di un binario (nord - sud). Perché si consumano di più le ruote di un lato rispetto a quelle dell'altro?

Moto rototraslatorio

Il sistema Ω trasla di velocità varia $\mathbf{V_T}$ rispetto al sistema fisso O, contemporaneamente ruota con velocità angolare fissa Ω attorno al suo asse z. Le relazioni tra i due sistemi di riferimento, O e Ω sono:

19)

che sono abbastanza complesse!!!

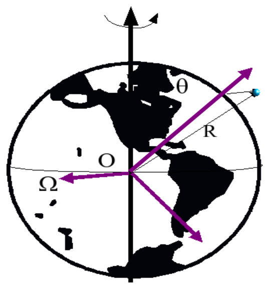
$$\vec{R}=\vec{\Omega O}+\vec{r}$$
$$se\ \omega costante$$
$$\vec{v}=\vec{v}_r+\vec{\omega}\,x\,\vec{r}+\vec{v}_T$$
$$\vec{a}=\vec{a}_T+\vec{\omega}\,x\,(\vec{\omega}\,x\,\vec{r})+2\,\omega\,x\,\vec{v}_r+\vec{a}_r$$

Sistema di riferimento terrestre

$$M_T = 6 \text{x} 10^{24} kg \qquad R_T = 6.4 \text{x} 10^{6} m \qquad \omega = \frac{2\pi}{86164} \simeq 7.3\, 10^{-5} s^{-1}$$

Vedi le tre trasparenze corrispondenti. Un sistema di riferimento solidale con il nostro laboratorio si muove attorno alla terra con la stessa velocità angolare della terra.
L'asse di rotazione va da sud a nord, mentre probabilmente il nostro asse z punta verso l'alto, passa per il centro della terra, ma non è parallelo all'asse di rotazione.

Il nostro sistema casalingo non è inerziale, in ogni punto del nostro laboratorio c'è una forza apparente che dipende dall'orientazione dell'asse di rotazione e dalla distanza del punto dal centro della terra.
Nelle 19) sono ricavate le forze apparenti a cui è soggetto un mobile in un qualsiasi punto dello spazio del nostro laboratorio.



19)
$$\begin{aligned}
&\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{\omega}\, x\, \vec{R} \\
&\vec{a} = \vec{a}_r + 2\,\omega\, x\, \vec{v}_r + \vec{\omega}\, x\, (\vec{\omega}\, x\, \vec{R}) \\
&\vec{F}_{appa.} = -2\, m\, \omega\, x\, \vec{v}_r - m\, \vec{\omega}\, x\, (\vec{\omega}\, x\, \vec{R})
\end{aligned}$$

Ricordando che il raggio della terra è molto grande rispetto agli spostamenti nel laboratorio scriviamo:

20)
$$\begin{aligned}
&\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{R} = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{R}_T + \vec{r}) \\
&\qquad per\ R_T \gg r \\
&\vec{a} = \vec{a}_r + 2\,\omega \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}_T) \\
&\vec{F}\,' = -m\vec{g} - 2\, m\, \omega \times \vec{v}_r - m\, \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}_T) = m\, \vec{a}_r \\
&\vec{F}\,' = -m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_{ce}
\end{aligned}$$

e possiamo dare una stima delle due forze apparenti

21)
$$\begin{aligned}
&\vec{F}\,' = -m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_{ce} \\
&F_{ce} = m\,\omega^2 R_T \sin\theta \\
&max\, \frac{F_{ce}}{m} \simeq 0.034\, N\, kg^{-1} \\
&F_c = \left| 2\, m\, \vec{\omega}\, x\, \vec{v}_\Omega \right| = 2\, m\, \omega\, v_\Omega \sin\phi \\
&max \quad \frac{F_c}{m} = 0.0044\, N\, kg^{-1} \\
&per\ v = 30\, ms^{-1} \equiv 108\, km\, s^{-1}
\end{aligned}$$

La forza centrifuga di trascinamento è sempre perpendicolare all'asse di rotazione terrestre, quindi ha la stessa direzione di g solo all'equatore, dove è massima, circa il 3‰ di g. La forza di Coriolis per un treno che nel nostro emisfero viaggi verso il sud, quindi essenzialmente si stia allontanando dal polo nord, è diretta verso Est e vale al massimo (giusto al polo : $\phi=\pi/2$) 4.4 milliNewton per chilogrammo massa alla velocità di circa 100 km all'ora.
La prima è piccola rispetto alla gravità, ma la forza di Coriolis che è trasversale a g, nonostante il suo piccolo valore, è causa della erosione interna della verga destra nei tratti in cui i treni pesanti corrono da nord a sud.