

Fisica _I
Primo semestre**Meccanica****Dinamica****Sommario**

Dinamica.....	1
Il problema della Caduta libera.....	1
Risolita.....	2
Moto a parabola.....	3
Equazione della traiettoria parabolica.....	4
Cinematica	5
Moto circolare vario.....	5
Moto vario su traiettoria generica.....	6
Piano osculatore.....	9
Calcolo del modulo del raggio di curvatura.....	10
Appendice	10

Il problema della Caduta libera

(Ricordo il problema del sasso che cade dalla torre già discusso.)

Si studia adesso il moto di un mobile in accelerazione costante. Supponiamo che un mobile inizialmente fermo sia soggetto ad una accelerazione $\mathbf{a}=(0,0,a_0)$ e lasciato libero di muoversi.

L'equazioni orarie rispetto all'asse x e y sono banali:

$$\ddot{x}=0$$

$$\ddot{y}=0$$

e ricordando le condizioni iniziali

- 1) $x(t=0)=0; y(t=0)=0; \dot{x}(t=0)=0; \dot{y}(t=0)=0$
le soluzioni (equazioni orarie per x e y) sono:
 $x(t)=0$ e $y(t)=0$

mentre per l'asse z

1 a) $\ddot{z} = a_0$ segue integrando due volte

$$v_z(t) = a_0 t \quad z(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$$

con le condizioni iniziali $z(t=0) = 0; \dot{z}(t=0) = 0$

Questo moto ricorda il moto di un corpo in caduta libera, e per questo si indica con il termine di *caduta libera*. In effetto l'accelerazione a cui sono soggetti tutti i corpi pesanti (in genere indicati con *gravi*) si muovono dall'alto verso il basso con una accelerazione costante uguale $-g$ (asse zeta verticale che punta in alto) (pari a 9.8 m/s^2).

Se lasciamo cadere un corpo dalla sommità della torre possiamo, conoscendone la legge del moto, predire la velocità finale e il tempo impiegato per raggiungere il terreno.

Intanto dalle (1) sostituendo $-g$ al posto di a_0 e ricordando che si parte da circa $h=50$ metri in altezza:

$$2) \quad v_z(t) = -gt \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

quando si arriva a terra? basterà porre $z(t)=0$ nella seconda e si ottiene

$$3) \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (\text{le dimensioni sono [s]}) \quad \text{che vale circa 3.19 secondi.}$$

quanto vale la velocità finale? sostituisco t nella prima delle 2) e ottengo la velocità in funzione dell'altezza h :

$$4) \quad v_z = -\sqrt{2hg} \quad (\text{dimensioni [ms}^{-1}\text{]}) \quad \text{che per } h=50 \text{ m vale } v=31.3 \text{ m/sec}$$

che è una velocità di tutto rispetto! in altri termini 112 km/ora.

Risalita

Supponiamo adesso di lanciare il nostro grave verso l'alto. L'esperienza dice che il suo moto si rallenta fino a fermarsi.

A che altezza arriva? e quando ci arriva? Adesso le condizioni iniziali sono: posizione in $z=0$ e velocità $v_z(0)=v_0$ e le 2) vanno modificate:

$$5) \quad v_z(t) = -gt + v_0 \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

La velocità si annulla per

$$5a) \quad t = v_0/g$$

come deriva dalla prima delle 5). Sostituita nella seconda ci da l'altezza raggiunta

$$6) \quad h = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} + \frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

e passando ai numeri, per esempio con una velocità iniziale pari a 31.3 m/s (112 km/ora) otteniamo $h = 50$ m, cioè la stessa altezza di prima. Possiamo quasi enunciare una legge:

Per far raggiungere ad un grave una altezza h dobbiamo lanciarlo con la stessa velocità (a parte il segno) con cui lo stesso grave arriva al suolo quando cade liberamente dalla stessa altezza h .

Moto a parabola

Complichiamoci un po' la vita; supponiamo adesso di lanciare il nostro grave con una velocità che punta in una direzione generica. Cioè la velocità iniziale ha una componente non nulla anche sul asse x e/o y . Per semplicità supponiamo che il moto avvenga tutto nel piano $z = 0$ (questa scelta non riduce la generalità dei risultati finali,... perché?).

Dunque l'accelerazione è sempre $-g$ [ms^{-2}], mentre la velocità iniziale è $v_0 = (v_{x0}, 0, v_{z0})$. Le equazioni integrando le 1 e con le condizioni iniziali anche sulla velocità

$$7) \quad \begin{aligned} v_x(t) &= v_{x0} & x(t) &= v_{x0}t \\ v_z(t) &= -gt + v_{z0} & z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t \end{aligned}$$

e per y

$$v_y(t) = 0 \quad y(t) = 0$$

la seconda linea è esattamente come le 5), la prima linea descrive il moto proiettato sull'asse x , la terza il moto su y che è inessenziale...

I due moti , su x e z, sono indipendenti poiché le due equazioni orarie non hanno termini misti in x o z. Possono essere studiati separatamente rispetto al parametro tempo e alla fine correlati confrontando i valori della x con quelli della z a tempi uguali.

Se si elimina nella equazione in z la t ricavandola dalla equazione in x si ottiene una equazione in z,x nota con il nome di parabola.

$$7a) \quad x(t) = v_{x0} t \quad t = \frac{x}{v_{x0}} \quad z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{x0}} \right)^2 + \frac{v_{z0}}{v_{x0}} x$$

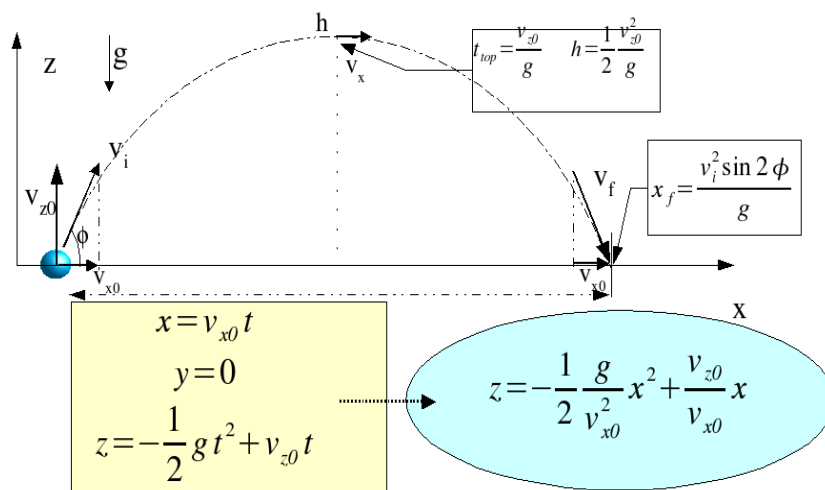
La composizione dei due moti è quello seguito da un qualsiasi sasso lanciato in aria, e viene chiamato *moto parabolico*.

Ora conoscendo lo stato iniziale del grave, possiamo ricavare l'altezza massima ed il tempo impiegato per arrivarvi. Il mobile sale e poi scende impiegando il doppio del tempo necessario per la sola salita, d'altra parte durante questo moto alternato il mobile si muove anche lungo l'asse x. Possiamo calcolare dove è arrivato sostituendo nella seconda equazione della prima riga delle 7) il tempo già trovato pari a $t = 2 v_{z0}/g$ (vedi 5a); così la x finale è:

$$8) \quad x_f = 2 \frac{v_{x0} v_{z0}}{g} = \frac{v^2 \sin 2\phi}{g}$$

la distanza x_f coperta dal mobile prima di toccare nuovamente il suolo è generalmente indicata come la *gittata*.

Se immaginiamo di lanciare il grave sempre con la stessa velocità iniziale, ma con angolatura diversa, possiamo domandarci: quale è l'angolo migliore per avere la massima gittata? prego calcolare?



Equazione della traiettoria parabolica

Le due leggi orarie, quella per le x e quella per la z , hanno come parametro comune il tempo e quindi eliminandolo esattamente come abbiamo fatto prima 7a) (si ricava il tempo dalla prima equazione e si sostituisce nella seconda) otteniamo l'equazione geometrica del moto

$$8) \quad z = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{x0}^2} x^2 + \frac{v_{z0}}{v_{x0}} x$$

una formula che rappresenta il luogo dei punti descritti dal mobile. Il grafico della 8) sul piano zx si presenta come una parabola con la parte concava rivolta verso il basso.

E' il tipico moto *parabolico* di un sasso lanciato in aria. Uno studio analitico accurato della forma 8) evidenzia il massimo della parabola a ($z=1/2 v_{z0}^2/g$ a $x=v_{x0} v_{z0} /g$) e le due intersezioni della curva con l'asse x a ($z=0, x=0$ e $z=0, x=2 v_{x0} v_{z0} /g$) che individuano il punto di partenze ed il punto di arrivo come del resto abbiamo già scoperto 8).

Cinematica

Moto circolare vario

Ritorniamo alla *pista circolare* piana e supponiamo adesso di percorrerla con velocità variabile; siamo di fronte ad un moto vario sul piano. Sia $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ il vettore posizione di cui immaginiamo di conoscere a priori la equazione oraria. Da questo ricaviamo le velocità derivando una prima volta rispetto al tempo e, poi l'accelerazione, derivando una seconda volta. Innanzi tutto ricordiamo la derivata di un vettore generico, *ma sempre giacente sul piano xy*, rispetto al tempo. Vedi in appendice.

Adesso esprimiamo il vettore \mathbf{R} tenendo conto delle condizioni geometriche del moto:

- il moto avviene su di una pista piana (pensa al piano xy) e circolare di raggio ρ ,
- il modulo di \mathbf{R} è costante uguale a ρ ,
- \mathbf{R} è sempre radiale.
- ϕ è l'angolo polare che il vettore \mathbf{R} fa con l'asse di riferimento (asse x)
- ω è la velocità angolare e per definizione $\omega = d\phi/dt$

da cui la tabella qui in basso.

$$\vec{R}(t) = \rho \hat{R} \quad \text{con} \quad \hat{R} = (\cos(\phi(t)), \sin(\phi(t)))$$

la velocità'

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{R}}{dt} = \rho \frac{d\hat{R}}{dt} = \rho \frac{d\hat{R}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \rho \frac{d\phi}{dt} \hat{R}_n = \rho \omega \hat{R}_n$$

9)

dove $\frac{d\hat{R}}{d\phi} = \hat{R}_n$ *dimostrare!*

nota \hat{R}_n è normale a \hat{R}

Il versore \mathbf{R}_n è perpendicolare a \mathbf{R} !

Calcolo adesso l'accelerazione.

l'accelerazione

$$9b) \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \rho \omega \hat{R}_n = \rho \frac{d\omega}{dt} \hat{R}_n + \rho \omega \frac{d\hat{R}_n}{dt} = a_T \hat{R}_n - a_r \hat{R}$$

nota che ω coincide con $\dot{\phi}$ e quindi $a_T = \rho \ddot{\phi}$

poiche'

$$\frac{d\hat{R}_n}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{d\hat{R}_n}{d\phi} = -\omega \hat{R} \quad \text{segue} \quad a_r = \omega^2 \rho$$

La prima linea delle 9) tiene conto delle condizioni di **moto vario** su indicato; infatti il vettore posizione ha il modulo del raggio ρ e ruota con una legge oraria data da $\phi(t)$, mantenendo sempre la direzione del raggio vettore.

Tuttavia si deve fare attenzione che qui la variabile ϕ non cresce linearmente nel tempo come nel caso della velocità uniforme, ma è una *funzione arbitraria del tempo*.

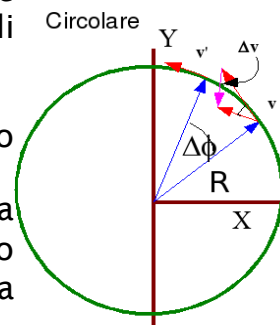
Nel fare le derivate del vettore **R** bisogna ricordare la regola delle derivate funzione di funzione. Infatti **R**, funzione di t via ϕ , va derivato prima rispetto alla variabile angolare ϕ e poi questa va derivata rispetto al tempo. Infine bisogna ricordare come si fa la derivata di un versore (4.17).

La velocità **v** è esattamente quello che ci aspettiamo: il modulo è pari al raggio per la velocità angolare in quell'istante, mentre la direzione ed il senso sono dati dal versore tangente.

Per l'accelerazione c'è il solito termine *radiale* della *accelerazione centripeta* diretta verso il centro a_r e dipendente dal quadrato della velocità angolare, ma c'è anche un termine *tangenziale* indicato con a_T che è legato alla derivata della velocità angolare (o seconda derivata di ϕ) che, visto l'ipotesi di *moto vario*, non è certamente nulla. Una variazione della velocità angolare, per esempio positiva, indica un aumento anche della velocità tangenziale del mobile sulla pista e quindi una corrispondente accelerazione tangenziale.

Questo risultato può essere visualizzato sullo stesso grafico e ricavato geometricamente.

Nel procedimento ricordare che le due velocità da confrontare, una presa nel punto ϕ e l'altra nel successivo $\phi+d\phi$ differiscono in direzione di un angolo $d\phi \approx \omega dt$ ma



anche in lunghezza perché nel frattempo la velocità può' essere cambiata in modulo. Conviene scomporre la differenza in due vettori (regola del parallelogrammo) uno tangente e l'altro radiale, poi si dividono per dt e si ottiene per l'accelerazione il risultato di sopra, separato sia per la parte tangenziale che per quella radiale.

Moto vario su traiettoria generica

Ritorniamo alla nostra superstrada iniziale, quella che va dall'aeroporto di Pisa a Firenze sulla quale la nostra auto si muove liberamente. Alla fine si tratta di un moto vario su di una traiettoria generica.

Possiamo definire una coordinata curvilinea s che misura la distanza dell'auto lungo la strada a partire dall'aeroporto e con equazione oraria $s=s(t)$. Questa ci fornisce la velocità scalare $v= ds/dt$ e l'accelerazione scalare $a= dv/dt = d(ds/dt)/dt$ che però come abbiamo capito non sono sufficienti per descrivere correttamente tutto il moto.

Abbiamo un sistema di coordinate con l'asse x che dall'aeroporto punta verso Firenze, l'asse y che va verso la torre. Per il momento, capire meglio la geometria che ci sta dietro, limitiamoci ad un moto che si svolge su di un piano e cioè sempre a $z=0$. Il problema sarà facilmente generalizzabile quando conosceremo meglio il calcolo vettoriale.

Un sistema destrorso come se ne vede tanti. Con questo sistema possiamo indicare ogni posizione della nostra auto con un vettore posizione \mathbf{R} che in effetti congiunge il centro del sistema di coordinate con il punto in cui si trova la nostra auto. \mathbf{R} varia con il movimento dell'auto sulla strada. C'è anche qualche legame tra s e \mathbf{R} ; in effetti due punti della traiettoria pochissimo distanti, puntati dai due vettori posizione \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 , ed c'è l'ovvia relazione $\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1 = \Delta\mathbf{s}$ che indica il vettore *corda* che sottende il tratto di strada tra i punti 1 e 2. Questo vettore per tratti piccoli (al limite) coincide con la strada stessa.

Quindi la velocità \mathbf{v} , che si ottiene dividendo il $\Delta\mathbf{s}$ per Δt , ha per modulo la velocità scalare misurata lungo la strada e per direzione la tangente alla traiettoria nel punto in esame;

$$10) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \hat{T} = v_s \hat{T}$$

come forse era già ovvio.

Purtroppo per l'accelerazione non è la stessa cosa, la derivata seconda di $s(t)$ dà in effetti solo la parte tangenziale che non è tutto.

Ora su di un tratto di strada dritta, cioè sui rettilinei, non c'è gran che da dire poiché le variazioni del moto avvengono nell'unica direzione possibile e la velocità e l'accelerazione corrispondono in modulo e segno con i valori scalari.

Prendiamo invece in esame un tratto curvilineo. " $s(t)$ " è la funzione del tempo nota fornitoci dal pilota (cioè la tabella di marcia). Intanto possiamo passare da s a \mathbf{R} associando ad ogni punto della strada individuato da s , un \mathbf{R} che individua il punto nel sistema di riferimento.

Mettiamoci ora su di una curva e fissiamo due punti che indichiamo con \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 incontrati dall'auto all'istante t_1 e $t_2=t_1+dt$. Le velocità in questi due punti sono

$$\vec{v}_1 = v_{s1} \hat{T}_1 \quad \vec{v}_2 = v_{s2} \hat{T}_2 = (v_{s1} + \Delta v_s)(\hat{T}_1 + \Delta \hat{T})$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = v_{s1} \Delta \hat{T} + \Delta v_s \hat{T}_1$$

e differiscono (a parte un infinitesimo di ordine superiore che trascureremo) sia per intensità che per direzione di un angolo $\Delta\theta$ come possiamo vedere anche su di un disegno.

Il calcolo dell'accelerazione prevede il limite del rapporto incrementale

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t} \frac{v_{s1} \Delta \hat{T} + \Delta v_s \hat{T}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta v_s}{\Delta t} \hat{T}_1 + \lim_{\Delta t} v_{s1} \frac{\Delta \hat{T}}{\Delta t} \quad 10a)$$

e passando al limite

$$10b) \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_s \hat{T} + v_s \frac{d\hat{T}}{dt} = a_s \hat{T} + v_s \omega \hat{T}_n$$

dove ω è la velocità angolare con cui ruota il versore tangente.

Nota: in questo caso le componenti della tangente dipendono dall'angolo θ di \mathbf{T} con l'asse x , che non è legato all'angolo ϕ che \mathbf{R} fa con l'asse x poiché

il moto non è circolare e il centro del sistema di riferimento non coincide con il centro di curvatura.

Dalla 10b) si trova che l'accelerazione ha una componente tangenziale ed una componente perpendicolare alla tangente. Ma per meglio capire facciamo un disegno:

- spicchiamo i due vettori velocità nei due punti 1 e 2 indicati.
- quindi trasportiamo, parallelamente a se stesso, il primo vettore sul secondo punto.
- tracciamo il vettore differenza che unisce i due estremi liberi dei due vettori velocità segnando il senso che va dal primo al secondo.
- scomponiamo questo vettore in uno tangente alla traiettoria e l'altro perpendicolare alla suddetta tangente (regola del parallelogrammo).

$\Delta s = \rho \Delta \theta$ da cui $v_s = \rho \omega$ e
 $v_{s2} - v_{s1} = \Delta v_s = \rho \Delta \omega$

nota qui:
 $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$
 $\dot{\omega} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_s \hat{T} + v_s \frac{d\hat{T}}{dt} = a_s \hat{T} + v_s \omega \hat{T}_n$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \frac{d\omega}{dt} \hat{T} + \rho \omega^2 \hat{T}_n = a_s \hat{T} - \rho \omega^2 \hat{\rho}$

Guardando al disegno si capisce ancora meglio il significato della equazione 10a)

Naturalmente la componente normale alla traiettoria si annulla con $\Delta\theta$ se la traiettoria è rettilinea!

Ma possiamo fare di più' e in modo più' compatto!

Per la velocità

Sfruttiamo meglio l'equazione che ci da la derivata di un vettore generico sul piano. Come indicato in figura, il vettore posizione può' essere pensato come la somma di un vettore di lunghezza

$\vec{R} = \rho \hat{R}$ dove $|\vec{R}| = \rho$
 $\dot{\vec{R}} = \dot{\rho} \hat{R} + \rho \dot{\hat{R}}$
 d'altra parte tenedo conto del cerchio osculatore
 $\hat{R} = \hat{l}_0 + \hat{r}$ segue
 $\dot{\hat{R}} = \frac{\dot{l}_0 + \dot{\hat{r}}}{\rho}$ e $\dot{\hat{R}} = \frac{\dot{\phi} \hat{T}}{\rho} - \frac{\dot{\rho} \hat{R}}{\rho}$
 che sostituito nella prima porta ovviamente a
 $\dot{\vec{R}} = \dot{\phi} \hat{T} = \omega \hat{T}$

costante l_c più il vettore r che congiunge il centro virtuale di curvatura al punto mobile sulla parte di traiettoria che si sovrappone praticamente alla circonferenza di raggio r .

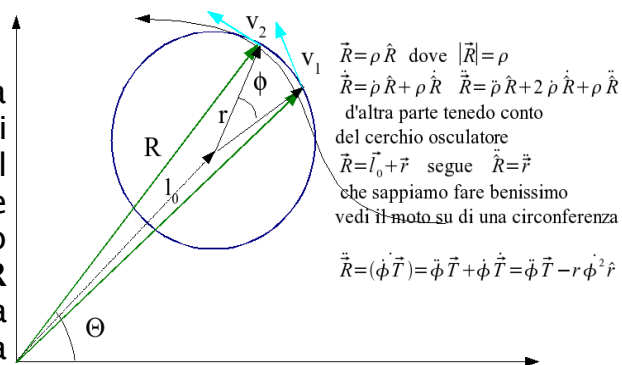
Ora l_c è un vettore costante e pertanto la derivata di R corrisponde di fatto con la derivata di r . La velocità è tangente alla circonferenza ed è tangente alla traiettoria stessa.

Nella figura si mostra che la formula generale è infatti equivalente a derivare direttamente il piccolo vettore r che si suppone correre sul piano della circonferenza a velocità angolare ϕ punto.

Per l'accelerazione

Con la stessa tecnica si arriva immediatamente al risultato. Si esprime il vettore R in funzione del vettore fisso l_c più r che congiunge il centro di curvatura con il punto mobile. La derivata seconda di R coincide in questo punto della traiettoria con la derivata seconda del vettore r .

Il risultato è in figura. Dove appare anche la accelerazione centripeta, che punta nella direzione opposta ad r e dipende dal quadrato della velocità angolare di rotazione del mobile attorno al punto di curvatura.



Piano osculatore

Nella discussione precedente abbiamo introdotto il raggio della curvatura senza una definizione od una procedura che ci permetta di valutare il raggio di curvatura.

- La geometria afferma che per tre punti passa una ed una sola circonferenza.
- se i tre punti (1,2,3) sono stati scelti sul piano xy, la circonferenza è determinata da tre parametri: le coordinate del centro e il raggio; quindi bastano tre equazioni che si ottengono imponendo che la circonferenza passi per i tre punti suddetti,

14)

$$\begin{aligned}(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 &= \rho \\ (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 &= \rho \\ (x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 &= \rho\end{aligned}$$

- nel caso arbitrario di tre punti nello spazio allora la circonferenza giace sul piano sede dei tre punti e la circonferenza è ancora individuata risolvendo il sistema che si ottiene imponendo ai punti di appartenere alla stessa circonferenza, ma:
- i parametri da calcolare adesso sono sei, le tre coordinate del centro, il raggio ρ e due coseni direttori indipendenti del piano su cui giace la circonferenza.
- la circonferenza nello spazio è determinata dalla intersezione di un piano con una sfera e quindi da due condizioni a cui devono soddisfare i tre punti; appartenere alla sfera ed al piano.
- quindi due condizioni e tre punti che alla fine danno origine a sei equazioni sufficienti per calcolare i sei parametri.

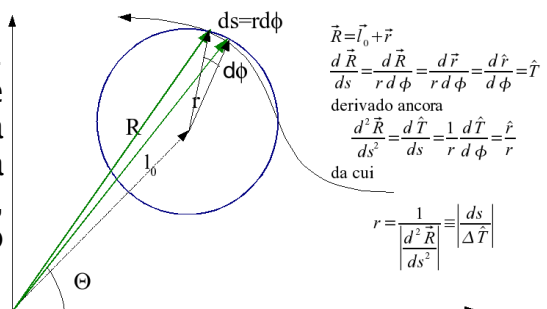
$$\begin{aligned}(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2 &= \rho \\ c_x x_i + c_y y_i + c_z z_i &= d \quad i=1,2,3 \\ \text{con la condizione} \\ c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 &= 1\end{aligned}$$

15)

In conclusione, fissati tre punti sulla traiettoria, resta fissata anche la circonferenza e quindi se abbiamo cura nello scegliere i tre punti lungo la curvatura in modo che siano a distanza infinitesima, troveremo la circonferenza di un cerchio, detto *cerchio osculatore*. Questa circonferenza è praticamente coincidente con una parte del cammino, (voglio dire più che tangente) e giacente sul *piano osculatore* della curva in esame (quello che contiene i tre punti).

Calcolo del modulo del raggio di curvatura

Ma cosa è il raggio di curvatura. Certamente deve essere possibile valutare il raggio di curvatura in ogni punto della traiettoria in base alla equazione oraria della traiettoria stessa. In figura, conoscendo un intervallo ds percorso





lungo la traiettoria e la variazione della tangente nei due punti estremi di ds , si ricava il valore del raggio di curvatura come modulo del semplice rapporto $\Delta T / ds$!

Appendice

Nella tabella si indica la derivata rispetto al tempo di un vettore generico. Il conto è pensato per un vettore che si muova su di un piano. Nel prossimo capitolo si generalizzerà il concetto.

$$\vec{R}(t) = R(\phi(t)) \equiv \rho(\cos \phi(t), \sin \phi(t)) = \rho \hat{R}$$

con ρ modulo di \vec{R}

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \hat{R} + \rho \frac{d\hat{R}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \hat{R} + \rho \frac{d\hat{R}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \dot{\rho} \hat{R} + \rho \omega \hat{R}_n$$

con $\frac{d\phi}{dt} = \omega$