G.M.P.

Corso di Laurea in Fisica Unipi

Novembre 2010
Cap.06.v10

Fisica _I

Primo semestre

Cinematica

Sommario

Moti nello spazio

Prendiamo un moto rettilineo uniforme. La velocità è costante e la sua derivata rispetto al tempo, l' accelerazione, è ovviamente nulla. Quindi con le condizioni di sopra l'equazione oraria è:

8) $$\vec{R}(t)=\vec{v}_0 t+\vec{R}_0$$

che ricorda esattamente l'equazione parametrica di una retta con la direzione fissata dal vettore v_o.
In verità, quando l'accelerazione non è costante non c'è una formula generale. Si può scrivere in forma differenziale impostando **F**=m**a** e poi ricavare il moto integrando. Viceversa se è nota a priori l'equazione oraria **R**(t) (cioè la traiettoria e la legge con cui è percorsa), possiamo ricavare, come abbiamo già più volte detto, le variabili cinematiche (**a** e **v**) derivando una volta ed una seconda volta .

Moto scalare su una traiettoria fissata.

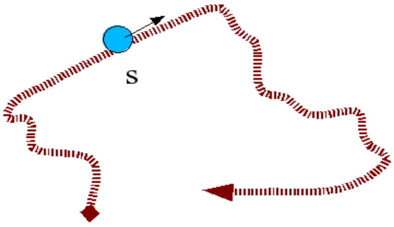
Per un moto su “traiettoria fissata” di cui è nota l'equazione scalare oraria s=s(t), allora sono note la velocita' e l'accelerazione scalare derivado rispetto al tempo.

Velocita' e Accelerazione scalare

cinematica
parto dalla legge oraria

$$s=s(t)$$
$$v(t)=\frac{ds(t)}{dt}$$
$$a(t)=\frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$

segue v e a



Se conosciamo invece i valori *scalari* della accelerazione segue, fissate la velocità e lo spazio iniziale, l'equazione oraria integrando due volte.

9)
$$v(t)=\int_0^t a(t')dt'+v_0$$
$$s(t)=\int_0^t v(t')dt'+s_0$$
$$s(t)=\int_0^t\int_0^{t_1} a(t')dt'dt_1+v_0 t+s_0$$

Con a(t)=0 ci si riduce ad una risultato semplice, mentre se a(t) vale g costante, si ottiene per la velocità:

$$v(t)=g t+v_0$$

e per lo spazio:

9a) $$s(t)=\frac{1}{2}g t^2+v_0 t+s_0$$

come abbiamo già scoperto.
Ma come ben presto scopriremo questo metodo non è sufficiente per descrivere correttamente tutti i parametri del moto!!!!!

Moto vettoriale

In generale il problema è ben più complesso, le velocità e le accelerazioni scalari non sono soddisfacenti... andiamo allora per gradi!. Anzi partiamo dalla equazione oraria **R**(t).

Dovremo calcolare in maniera più completa

9b) $$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{R}(t)}{dt}\ ;\ \vec{a}(t)=\frac{d}{dt}\frac{d\vec{R}(t)}{dt}=\frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2}$$

e vediamo!....

Vettori

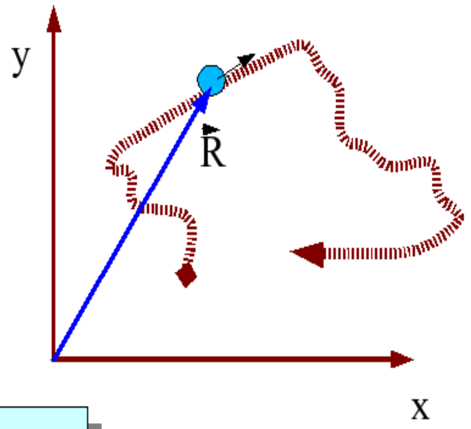
cinematica

$$\vec{R} = \vec{R}(t)$$

$$\vec{v} = d\vec{R}/dt$$

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt$$

dinamica



$$\vec{R}(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \vec{a}(t')\,dt'\,dt_1 + \vec{v}_0 t + \vec{R}_0$$

Moto rettilineo uniforme

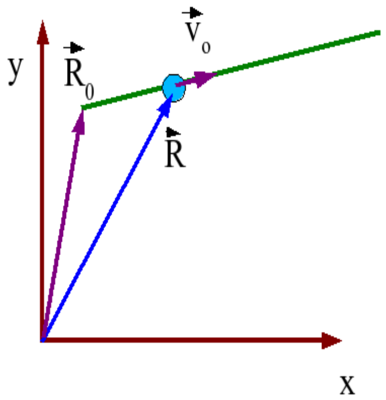
C'e' poco da dire; e' un moto descritto da una equazione oraria che poi e' simile alla equazione parametrica di un a retta. Per esempio sul piano....

$$\vec{R}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{R}_0 \equiv \left| \begin{array}{l} x = v_{x0} t + x_0 \\ y = v_{y0} t + y_0 \end{array} \right.$$

$$\vec{v} = d\vec{R}/dt = \vec{v}_0 \equiv \left| \begin{array}{l} v_x = v_{x0} \\ v_y = v_{y0} \end{array} \right.$$

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt = 0 \equiv \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{F} = 0$$



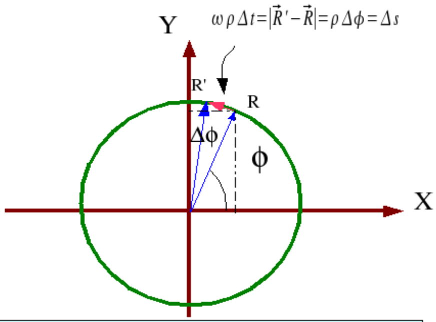
Moto circolare uniforme

Supponiamo adesso una pista perfettamente circolare di raggio ρ. Un' auto che viaggia a *velocità (scalare) costante* sulla pista percorre in intervalli di tempo uguali spazi uguali, solo che sono sempre in curva. Prendiamo allora come coordinata del cammino lo spazio percorso lungo la pista misurato a partire dalla partenza. L'*accelerazione scalare è ovviamente nulla* e l'equazione oraria scalare si riduce a:

10)
$$s(t)=v_0 t$$

all'istante iniziale siamo alla partenza e quindi s_0 è ovviamente nulla.
Studiamo cinematicamente questo moto nelle spazio bidimensionale, e cioe' conoscendo l'equazione oraria sul piano ricaviamo la velocita' e la accelerazione.
Il moto avviene su di una circonferenza di raggio ρ ed un punto sulla circonferenza puo' essere descritto dal vettore **R** che congiunge il centro con il punto stesso.

$$v_0=Cost. \qquad \rho=Cost.$$
$$v_0 \Delta t=\Delta s=\rho\Delta\phi$$
$$\omega=\lim\frac{\Delta\phi}{\Delta t}=\frac{d\phi}{dt}$$
$$\Delta s=\rho\,\omega\,\Delta t$$



$$\vec{R}(t)\equiv(\overbrace{\rho\cos(\phi)}^{X},\overbrace{\rho\sin(\phi)}^{Y})=(\rho\cos(\omega t),\rho\sin(\omega t))$$

Primo passo:

Un intervallo s lungo la circonferenza può essere espresso in termini dell'angolo φ(t) (*detta anche fase*) che il raggio **R**(t) fa con il raggio corrispondente al tempo t=0 (per esempio coincidente con l'asse x). "s" e' l' arco di cerchio compreso tra i due raggi di sopra e quindi $s(t)=\rho\phi(t)$. Lo sostituiamo nella formula di prima e

11) $\rho\phi(t)=v_0 t$ da cui $\phi(t)=\dfrac{v_0}{\rho}\,t$ con $\omega=\dfrac{v_0}{\rho}$

ovvero il moto uniforme sulla pista circolare può essere descritto con la *velocità angolare* ω (costante ovviamente) ed una *variabile angolare* φ funzione del tempo. Tutto in perfetta anologia con la velocità v_0 e la variabile spaziale s prima definite.
Purtroppo qualche cosa manca......analizziamo ancora di più....

Ma non è tutto!

Introduciamo ora un sistema di riferimento bidimensionale con assi x e y. Il centro del sistema coincide con il centro della circonferenza o della pista e l'asse x incontra la pista proprio nella partenza. All'istante iniziale, cioè a t =0, la nostra auto ha quindi per coordinate $x_0=\rho$, e $y_0=0$. Possiamo poi scrivere il vettore posizione nella forma compatta per ogni valore della variabile angolare φ proiettando il punto **R** sugli assi x e y.

R =(ρcos(ϕ), ρsin(ϕ))

che per ϕ=0 coincinde con il punto di partenza.
Lasciamo ora correre l'auto e vediamo come si muovono le proiezioni sui due assi, banalmente si ha:

12)

$$\begin{gathered} x(t)=\rho\cos(\phi)=\rho\cos(\omega t) \\ y(t)=\rho\sin(\phi)=\rho\sin(\omega t) \\ \textit{nota che} \\ \sin(\phi)=\cos(\phi-\pi/2) \end{gathered}$$

così i due movimenti sui due assi sono simili di tipo oscillatorio (a parte una fase di π/2). Sono caratterizzati dal fatto che ogni 2π si ripetono rigorosamente e se riportati su di un grafico con il tempo orizzontale ed il valore x o y sull'asse verticale, si ottiene un andamento sinosoidale ben noto; è caratteristico delle funzioni armoniche ed il moto corrispondente si chiama **moto armonico.** Ricorda l'oscillatore che abbiamo visto la scorsa lezione!

Nota:
Regola sulle derivate di funzione di funzione $\dfrac{d\cos(\phi(t))}{dt}=\dfrac{d\cos(\phi)}{d\phi}\dfrac{d\phi}{dt}$

Derivando vediamo come vanno le velocità

13)

$$\begin{aligned} v_x(t)&=\frac{d\,\rho\cos(\phi)}{dt}=-\rho\sin(\phi)\frac{d\phi}{dt}=-\omega\rho\sin(\omega t)=-\omega y \\ v_y(t)&=\frac{d\,\rho\sin(\phi)}{dt}=\ \rho\cos(\phi)\frac{d\phi}{dt}=\ \omega\rho\cos(\omega t)=\ \omega x \end{aligned}$$

in perfetto accordo a quanto gia' trovato; basta calcolare il modulo di v (11) !
La velocità su di un asse è *massima in modulo quando l'auto passa vicino agli estremi esterni dell'altro asse*.
E ... deriviamo ancora

14)

$$\begin{aligned} a_x(t)&=\frac{-d\,\omega\rho\sin(\omega t)}{dt}=-\omega^2\rho\cos(\omega t)=-\omega^2 x \\ a_y(t)&=\ \frac{d\,\omega\rho\cos(\omega t)}{dt}=-\omega^2\rho\sin(\omega t)=-\omega^2 y \end{aligned}$$

l'accelerazione su ogni asse è proporzionale alla distanza della proiezione dal centro ed è sempre di segno contraria alla coordinata!

Ma quello che è stupefacente è il fatto che appare una accelerazione non nulla, inaspettata! visto che avevamo ipotizzato un moto uniforme e quindi un accelerazione scalare nulla??

E non è ancora tutto!!

La velocità

In effetti ci siamo persi un pezzo importante della cinematica del moto della nostra auto poichè abbiamo lavorato con le coordinate perdendo di vista l'aspetto vettoriale!
Dunque vediamo quale è lo stato dell'auto in un punto, del resto generico della pista?
L'auto ha una velocità v_0 descritta da un vettore di intensità costante con la direzione tangete alla pista e senso *positivo* se quella velocità tende a far girare l'auto per esempio in *senso antiorario*, negativo *se in senso orario* (questa è una convenzione che faremo nostra)!

Il punto in cui si trova l'auto sarà indicato dal vettore posizione $\mathbf{R}(t)=(\rho\cos(\phi), \rho\sin(\phi))$. dove ovviamente ρ sta per il raggio della circonferenza (costante per definizione) e ϕ per l'angolo che il vettore fa con l'asse x contato in senso antiorario partendo dalla parte delle x positive, vedi anche le (11) che valgono comunque per un moto uniforme . L'angolo $\phi=\omega t$ è definito dalla velocità angolare ω che sarà positiva se fa girare l'auto nel senso antiorario, negativo altrimenti.

Nota:
Per convenzione si può definire un *vettore velocità angolare* $\boldsymbol{\omega}$, diretto perpendicolarmente al piano della pista e con il senso verso l'alto se fa ruotare nel senso *antiorario*, verso il basso se *orario*. In effetti pensando ad un asse zeta perpendicolare al piano della pista (per completare il sistema bidimensionale di prima), allora $\boldsymbol{\omega}$ dovrebbe essere parallelo all'asse zeta e congruo con questo se punta in alto, di senso opposto se punta in basso.
Ricordare comunque la regola della mano destra o del cavatappi! Immaginate di ruotare con il cavatappi per sovrapporre l'asse x all'asse y , il cavatappi avanza nella direzione dell'asse z! Oppure con la mano destra immaginate di afferrare l'asse di rotazione chiudendo il pugno nella stessa direzione di rotazione di un punto solidale con piano perpendicolare all'asse di rotazione, il pollice vi indicherà la direzione dell'asse di rotazione o del vettore $\boldsymbol{\omega}$.

Partiamo di nuovo dalla definizio e di $\mathbf{R} = (\rho\cos(\phi), \rho\sin(\phi)) =\rho(\cos(\phi), \rho\sin(\phi)) = \rho\mathbf{u}(\phi)$ dove $\mathbf{u}$ è il versore (di modulo unitario!) di $\mathbf{R}$.
Derivando il vettore **R,** otterremo come prima le le (13) che in forma compatta vettoriale sono quelle aspettate:

15a) $\mathbf{v}(t)=\rho\, d\mathbf{u}/dt = \rho\,(-\sin(\phi), \cos(\phi))\, d\phi/dt = \omega\rho\,(-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$

Adesso possiamo anche capire meglio guardando al disegno nel ricavare lo stesso risultato per via geometrica.

Prendiamo due punti distanti $\Delta s=\rho\omega\Delta t$ sulla pista, colleghiamo questi due punti con il centro e avremo due vettori $\mathbf{R}(t)$ e $\mathbf{R}(t+\Delta t)$. La differenza dei due vettori ha come modulo proprio $\sim\Delta s=\omega\rho\Delta t$, come direzione praticamente la direzione della tangente in quel punto e come senso quello che va dall'estremo di $\mathbf{R}(t)$ verso $\mathbf{R}(t+\Delta t)$.

Quindi Δ**R** $=\rho\omega\Delta t$ **T** dove **T** è il *versore (vettore unitario)* della tangente in **R** che punta nel senso antiorario. Ora **T** è perpendicolare a **R** e quindi le sue coordinate rispetto al nostro sistema di riferimento sono **T**$=(-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$. infine per trovare la velocità divido Δ**R** per Δt e ritrovo pari, pari le (13), ovvero in forma compatta

15b) $\mathbf{v}(t) = \omega\rho\,(-\sin(\omega t),\ \cos(\omega t))=\rho\,\omega\mathbf{T}$

La velocità è un vettore di norma costante, ma con proiezioni sull'assi che sono funzioni armoniche del tempo simili alle proiezioni di R, ma con una ***fase in anticipo di π/2*** *rispetto alle cordinate x(t),y(t).* (dimostrare?)

Avrenmmo potuto anche ragionare così:

Ripartiamo dalle ipotesi di base, cioè moto unforme e quindi velocità scalare lungo la pista costante pari a v_0. Intuitivamente, pensando che in ogni punto la velocità non può essere che tangente alla pista, scriviamo la velocità in termini della velocita' scalare e del *versore* **T** della tengente nel punto **R**.

15c) $\vec{v}=v_0\boldsymbol{T}=\omega\rho\boldsymbol{T}$

che espresso in coordinate porta velocemente alla formula di prima.

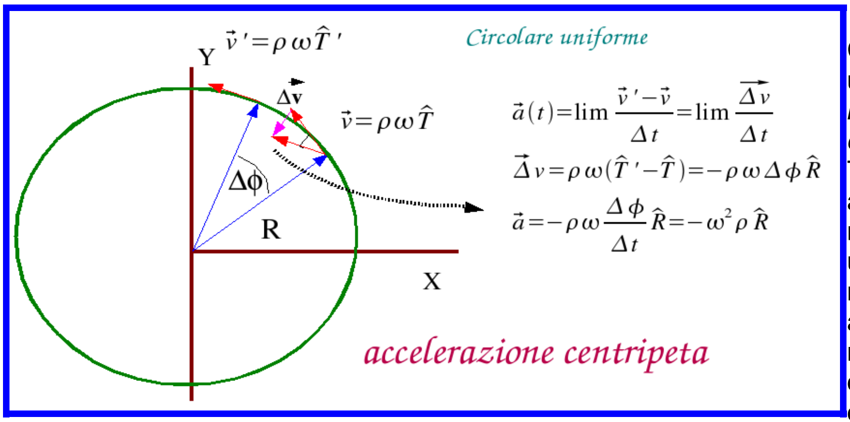
L' accelerazione.

Per via analitica si ottiene il risultato (14), infatti derivando le componenti della velocità avremo $\mathbf{a}(t)=(-\omega^2\rho\cos(\omega t), -\omega^2\rho\sin(\omega t))$. Il modulo di questo vettore non è nullo! ma vale $a=\omega^2\rho$ che è ben diverso da zero e anzi è costante!

Vediamo geometricamente che si può dire.

Prendiamo due punti distanti $\Delta s=\rho\omega\Delta t$ sulla pista, applichiamo in questi due punti i rispettivi vettori velocità **v**(t) e **v**(t+Δt) *che hanno la stessa lunghezza*, ma puntano in direzioni diverse con un angolo pari proprio a $\Delta\phi=\omega\Delta t$
La differenza dei due vettori ha come modulo $2v_0\sin(\Delta\phi/2) = \sim \omega\rho\Delta\phi = \omega^2\rho\Delta t$, come direzione praticamente la direzione del raggio in quel punto e come senso quello che va dall'esterno verso il centro e, nota bene, *indipendentemente dal senso di rotazione* (ω entra nella formula al quadrato!).
Quindi $\Delta\mathbf{v} = -\omega^2\rho\Delta t\,\mathbf{R}^{\wedge}$ dove $\mathbf{R}^{\wedge}$ è il versore di **R** . Ora $\mathbf{R}^{\wedge}$ si ottiene dal vettore **R** semplicemente dividendo per il suo modulo ρ, quindi è $\mathbf{R}^{\wedge}=(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$. infine per trovare l'accelerazione divido Δ**v** per dt e ritrovo pari, pari le (14), ovvero in forma compatta.

$\mathbf{a}(t)=(-\omega^2\rho\cos(\omega t), -\omega^2\rho\sin(\omega t))$



Conclusione il moto è si uniforme, ma curva e *quindi la velocità cambia continuamente direzione*. Tutto cio' giustifica una accelerazione *tangenziale* nulla poiche' il moto e' uniforme lungo la pista, mentre sorge una accelerazione *radiale* non nulla perpendicolare alla direzione istantanea di moto e quindi sempre diretta verso il centro della curvatura. Chiameremo questa accelerazione *radiale* con il nome di *accelerazione centripeta*.

Ricordando la dinamica potremmo dire, nel caso di un corpo di massa m che si muove su di una traiettoria circolare, che su di esso agisce una forza pari a -mρω² verso il centro del cerchio.

Uno nuovo tecnicismo

L'equazione (15) descrive la velocità in termini della velocità scalare e del vettore tangente **T.** Possiamo partire da qui per il calcolo della accelerazione derivando l'espressione con i metodi standard. La velocità appare come il prodotto di due termini: il primo è ωρ e il secondo è il versore della tangente **T.**

Quando deriviamo dobbiamo applicare le regole della matematica che affermano che *la derivata del prodotto di due funzioni è pari alla derivata della prima funzione per la seconda invariata più la derivata della seconda per la prima invariata .*

Quindi:

16) $$\vec a(t)=\frac{d\,\vec v(t)}{dt}=\frac{d\,\omega\,\rho}{dt}\vec T+\omega\,\rho\frac{d\,\vec T}{dt}$$

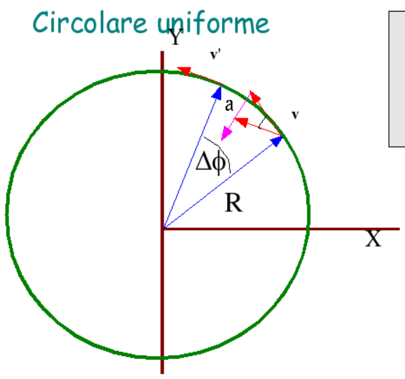
La prima derivata è nulla perche' ρ è costante, la seconda è la derivata del versore tangente. *La derivata temporale di un versore costanto in modulo,* come lo dimostrano i conti già fatti o le rappresentazioni geometriche, *è un versore ruotato di +π/2 e moltiplicato per la velocità angolare (con segno) istantanea di rotazione del versore stesso.* (Praticamente il versore normale...)

Per esempio

17) $$\frac{d\,\vec T}{dt}=\omega\,\widehat{T_N}=-\omega\,\hat R$$ il segno meno deriva dal fatto che il versore **T** rotato di π/2, pur sovrapponendosi al versore R ha il senso opposto.

Segue la 16)

18) $$\vec a=-\omega^{2}\rho\,\hat R$$



derivate dei versori

$$\vec{R} = \rho \hat{R} \qquad \vec{v} = \rho\, \omega\, \hat{T}$$

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{R}}{dt} = \frac{d\,\rho\,\hat{R}}{dt} = \rho\,\frac{d\,\hat{R}}{dt} = \rho\,\omega\,\hat{T}$$

$$\frac{d\,\hat{V}}{dt} = \omega\,\hat{V}_n$$

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \rho\,\omega\,\frac{d\,\hat{T}}{dt} = -\rho\,\omega^2\,\hat{R}$$

come ci aspettavamo. L'accelerazione contripeta è diretta lungo il raggio di rotazione, punta verso il centro ed è proporzionale al raggio ed al quadrato della velocità angolare.
Nota: questa definizione verrà rivista più avanti.