A sin(%omega t+%phi)

Corso di Laurea in Fisica Unipi

G.M.P.

Novembre 2010
Cap.05.v10

Fisica _I

Primo semestre

Meccanica

Sommario

La definizione della forza

Il secondo principio è sintetizzato in

1) **F**=m**a**

La forza è una *grandezza derivata* con le dimensioni

$$[F] = [ma] = [MLT^{-2}]$$

Possiamo allora fissare l'unità di forza come il prodotto di una unità di massa per una unità di accelerazione con riferimento ad un sistema di misura specifico. Per esempio, nel sistema SI, l'unità di misura della forza si chiama Newton (N) e diremo che

Un N è l'intensità di una forza che agendo sopra un corpo di massa 1 kg gli imprime una accelerazione di 1 m/s^2

La relazione 1) su scritta è la base di tutta la dinamica perchè come capiremo presto è da lì che partiremo per scrivere le equazioni del moto di un qualunque sistema di corpi sotto l'influenza delle forze.
*La relazione **F**=m**a** può essere pensata come la **funzione generatrice del moto**.*

Anzi conviene subito notare che nel formulare la relazione per un certo problema dinamico, tutte le difficoltà stanno proprio nell'esplicitare la forma della funzione **F** da porre nella 1).
La forma sarà dettata dal modello che a noi sembrerà descrivere meglio il comportamento della forza in esame (o meglio delle interazioni in gioco).

Una forza potrebbe essere costante come nel caso, vedremo, della forza peso, oppure dipendere linarmente dalla lunghezza come nel caso delle molle, o essere inversamente proporzionale al quadrato della distanza dei due corpi in interazione: per esempio nel caso di due particelle dotate di carica elettrica.

Forza totale e forza netta

Le forze che agiscono simultaneamente su di un *punto materiale* (come chiameremo spesso in futuro una massa praticamente di piccolissime dimensioni, direi puntiforme) spesso sono molteplici, ma quello che conta è la **forza totale (la forza netta)** risultante dalla somma di tutte le forze applicate.
Per prima cosa notiamo che il risultato di una forza applicata al nostro punto materiale è un variazione del moto nella direzione della forza. Se questa è parallela all'asse x tutto avviene lungo questo asse, se, indipendentemente un'altra forza preme nella direzione dell'asse y, questa accelera il punto materiale lungo y indipendentemente da quello che accade in x! L'esperienza conferma questo fatto rigorosamente. Il moto finale è praticamente *la composizione, in ogni istante, punto per punto* dei due moti.
Possiamo sintetizzare questo fatto in un *principio di indipendenza delle azioni simultanee.*
Questo principio spesso ci permette di studiare il moto indipendentemente nelle varie direzioni in cui le forze agiscono, ma non è sempre facile fattorizzare il moto secondo le direzioni indipendenti quando questo dipende in modo complicato e contemporaneamente da tutte le coordinate.
La somma totale delle forze è sicuramente una forza nulla se tutte le forze alla fine si compensano, ma generalmente è diversa da zero ed è la *forza netta risultante* che stabilisce il moto nella sua globalità.
Per esempio, una risultante completamente nulla ci dice che **F**=0 e quindi che la accelerazione è nulla e se il nostro punto materiale stava in quiete, in quiete resta.
D'altra parte inversamente, se scopriamo che l'accelerazione è nulla ne deriva che la forza totale è nulla e quindi la forza applicata al nostro mobile è nulla in quel punto dello spazio e quell'istante.
Per il momento studiamo il moto in una dimensione e ritorneremo prossimamente su questo punto.

Forza nulla

Partiamo dalla equazione **F**=m**a** e supponiamo che il corpo, o il punto materiale non sia soggetto a forze.
Quindi F=0 implica a=0 visto che la massa non può essere nulla. D'altra parte una accelerazione nulla implica banalmente velocità costante: infatti considerando due istanti t_1 e t_2 dalla definizione dell'accelerazione $a=(v_2- v_1)/(t_2 - t_1) =0$ segue immediatamente che $v_2=v_1$ per ogni coppia dei tempi.
Il moto è definito solo se si conosce la velocità v_0 nello stato iniziale ; dunque il corpo se ne sta fermo se inizialmente era fermo con $v_0=0$, o continua a muoversi con velocità v_0 se inizialmente v_0 era diversa da zero.
Lo spazio percorso nella direzione fissata è semplicemente $s(t)=v_0t + s_0$ dove s_0 è la posizione iniziale.

In realtà non abbiamo fatta nessuna ipotesi sulla direzione, stavamo pensando ad un moto unidimensionale, ma in effetti può essere in qualsiasi direzione dello spazio e perciò possiamo dire che il nostro moto è un moto rettilineo uniforme, proprio come quello descritto dal primo principio.
Sembrerebbe quasi che il primo principio sia contenuto nel secondo!
Tuttavia senza il primo principio avremmo avuto difficoltà a fissare il concetto di sistema inerziale e la loro relatività.
Dunque una equazione oraria completa, per un moto rettilineo uniforme, deve essere scritta vettorialmente: $\mathbf{R}=\mathbf{v}t + \mathbf{P}_0$ (che è simile all'equazione parametrica di una retta nello spazio tridimensionale, il parametri qui è il tempo.)

Caduta libera in campo gravitazionale

Un corpo di massa m ha, come ben tutti sanno, un peso che possiamo verificare direttamente sollevandolo da terra. E' la forza peso che deriva dalla attrazione (interazione) della massa m da parte della nostra terra.

Galileo ha avuto una parte importante nello studio della forza peso; ha dimostrato che tutti i corpi sono soggetti alla forza *peso proporzionale alla massa*, e che tutti i corpi anche di materiali diversi cadono verso terra con la stessa accelerazione (vedi nota). L'esperienza della caduta dei gravi coinvolse anche un illustre monumento, come dice almeno la leggenda, la torre di Pisa. Galileo nei suoi esperimenti tenne conto anche della resistenza dell'aria.
Oggi sappiamo ben di più: l'interazione tra il nostro mobile di massa m e la terra è descritto da un modello del tipo $F= - GmM_t/r^2$ dove G è la costante gravitazionale , M_t è la massa della terra, r è il raggio distanza tra il centro della terra e il punto materiale di massa m. La forza **F** aplicata sul punto materiale è diretta lungo il raggio terrestre e punta verso il centro della terra.
Ora il raggio della terra è circa 6000 Km, mentre gli spostamenti a cui noi siamo interessati nel nostro laboratorio casalingo sono di qualche decina di metri. La forza peso del nostro mobile in ogni punto del nostro piccolo laboratorio non può certo variare molto (variazioni dell'ordine del milionesimo), anzi la possiamo considerare costante pari a $F= - GmM_t/r_T^2$ dove r_T e' il raggio della terra cosiderato costante!
Quindi scriveremo che la forza peso , da qui in avanti chiamata P, vale $P= - mg$ dove g, che sta per Gm_t/r_T^2, indica la forza peso per unità di massa sulla superfice della terra, a livello del mare. “g” ha le dimensioni di un accelerazione e perciò viene comunemente chiamata a*ccelerazione di gravità* e sulla superfice della terra vale con buona approssimazione $g=9.8$ m/s^2. In altri termini possiamo dire che un corpo soggetto alla sua forza peso è accelerato di 9.8 metri al secondo ogni secondo.
Il peso, o la forza peso, non deve essere confuso con il *Kg - massa* che invece individua la massa unitaria inerziale del corpo campione depositato presso il Museo di Sevres.
Il kg - peso è pari alla forza con cui la terra attira il Kg- massa; per esempio là dove g =9.8 [NM^{-1}], il kg - peso corrisponde alla forza di 9.8 [N]

Con questo in mente immaginiamo ora di salire, come fece il Galileo sulla torre di Pisa, e da lassù lasciar cadere un grave (sasso!) di massa m.
L'equazione del moto è al solito F=ma dove espliciteremo F sostituendolo con la descrizione matematica della forza e cioè $F=-mg$. (senza segno vettoriale poichè è un problema unidimensionale! che si svolge solo su di un asse vericale.)
L'equazione diventa $-mg= ma$ da cui *semplificando* (! vedi qui la nota) per m otteniamo $a= - g$, (dove abbiamo scambiato per comodità e come poi faremo sempre in seguito il primo con il secondo membro: cioè ma=F)
L'accelerazione del sasso in caduta è costante ed è giusto -g.

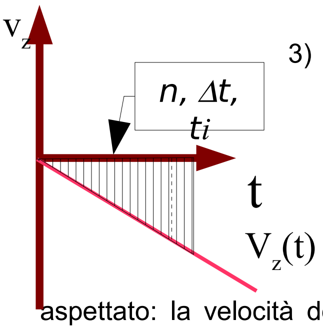
NOTA: Ricorda comunque la nota qui riporatata sulla massa!
Nota i due casi:

- Nella formula *F=ma*, *m* dà la misura della forza da applicare al corpo per una data accelerazione. D'altra parte a parità di accelerazione la forza cresce con m, ed è come dire che poichè occorre più forza per smuovere i corpi più pesanti, questi sembrano apparie più pigri o inerti di quelli più leggeri. Allora è naturale qualificare la massa di un corpo con l'aggettivo "inerziale" e chiamarla *massa inerziale*.
- Nella classica formula della attrazione gravitazionale $F = (G\,M\,m\,)/r^2$ m dà la misura di quanto forte un corpo e' attirato dalla forza di gravita' e quindi in questo ruolo la massa *m* potremmo indicarla come *massa gravitazionale*.

La massa ha ***due ruoli*** ! *e noi con Galileo abbiamo supposto che la m valga esattamente lo stesso valore nei due ruoli e per questo abbiamo potuto semplificare m nella equazione di sopra. Questo concetto verra' rivisto da Einstein e precisato meglio.*

La velocità

D'altra parte ricordando che l'accelerazione è il rapporto tra la variazione della velocità e il tempo impiegato, possiamo scrivere che :



3) $$\frac{v(t)-v_0}{t-t_0}=a=-g$$

$$con \quad t_0=0 \quad all'istante\ iniziale \qquad segue$$

$$v(t)=-g\,t+v_0$$

che si riduce semplicemente a v = -gt nel caso che il grave parta dalla sommità della torre con velocità nulla. Il risultato è quello aspettato: la velocità del corpo sotto una forza costante ha una accelerazione costante e quindi il modulo della sua velocità cresce linermente con il tempo.
Ora calcoliamo lo spazio percorso in funzione del tempo.

Lo spazio

La velocità non è costante e quindi dovremmo usare un metodo matematico più evoluto, l'integrale, ma visto che lo conosciamo poco, usiamo almeno per questa volta, un metodo elementare, un metodo iterativo che potremmo anche facilmente programmare con un normale calcolatore personale.
Per calcolare lo spazio percorso fino all'istante t, suddividiamo l'intervallo di tempo t in passi Δt, piccoli abbastanza da pensare che la variazione della velocità in ogni intervallo elementare sia veramente piccola. Se g vale circa 10 m/s^2 , dopo un secondo la velocità raggiunge 10 metri al secondo e pertanto se scegliamo il passo elementare di un centesimo di secondo, la variazione della velocità in ogni intervallo è di 0.1 m/s che probabilmente è già sufficientemente piccola per una prima valutazione rozza del nostro spazio percorso.
Ricordando che il sasso parte da una altezza di circa 60 metri dal suolo con velocità v_0 nulla; fisso come condizioni iniziali all'istante t=0: s_0 =h = 60 m e v_0 = 0 m/s.

La formula

4) $$z(t)=\sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t+h=-g\sum_{i=1}^{n} t_i\Delta t+h \quad dove \quad n=\frac{t}{\Delta t} \quad t_i=i\Delta t$$

fornisce lo spazio all'istante $t=t_n$. In definitiva essa è la somma di tutti gli spazi elementari $v_i\Delta t$ percorsi dal mobile nell'intervallo t a partire dall'altezza iniziale di 60 metri, cioe' e' l'area del trapezoide delimitato tra l'istante t=0 e t dal grafico della velocita' sul piano v,t!

Analizziamo ora un grafico v,t. Sull'asse verticale ci stanno le velocità in metri, sull'asse orizzontale il tempo in secondi. L'equazione v(t)= - gt corrisponde ad una retta che passa per 0 e punta verso il basso facendo con l'asse delle t un angolo θ la cui tangente vale tang(θ) = - 9.8.
La sommatoria che appare nella 4) corrisponde proprio all'aria del trapezoide delimitato dall'asse t e la funzione (retta) v(t) fra t=0 e $t=t_n$, a forma triangolare di base t_n e altezza $v(t_n)= -gt_n$.
L'area rigorosa del triangolo approssimato dal nostro trapezzoide, è $A= -gt_n^2/2$ (che ha le dimensioni di uno spazio). Il calcolo numerico della sommatoria corrisponderà al limite per Δt tendente a zero (o per n tendente a infinito) proprio all'area A.

In conclusione, sostituendo la sommatoria con l'area del triangolo, la formula della evoluzione oraria del nostro sasso in caduta libera è per un t generico:

5) $$z(t)=-\frac{1}{2}g t^2+h$$
o se si tiene conto di una velocita' iniziale
$$z(t)=-\frac{1}{2}g t^2+v_i t+h$$

se imponiamo nella prima delle 5) z(t)= 0 cioè la zeta alla base della torre, ricaviamo l'istante in cui il sasso tocca il suolo

6) $t=\sqrt{2\frac{h}{g}}$ con la velocità $v=-\sqrt{2gh}$

che per la torre , sostituendo i numeri h=60 e g=9.8, vale t=3.5 secondi e v = - 34.29 m/s
(pari a 123.44 km/ora!)
Che cosa accade se il sasso parte con una velocità iniziale diversa da zero, sia negativa che positiva? Calcolare e discutere i tempi e le velocità di arrivo al suolo, per esempio per v_0 = 10 o - 10 m/s?

Uso di un computer

Il calcolo dello spazio percorso in funzione del tempo può essere calcolato iterativamente con un personal computer scomponendo il moto in intervalli di tempo elementari, in cui si suppone che lo spazio in intervalli Δt a partire dall'istante t_i, sia percorso a velocità costante $v(t_i)$. In definitiva dobbiamo programmare la 4).

Ecco l'analisi della procedura da impiegare:

1. fisso le condizioni iniziali, t =0, z_0= h=60 m e v_0 = 0
2. ricavo la velocità nel primo intervallo elementare $v_1 = - g \Delta t + v_0$
3. quindi con questo valore di v ricalcolo lo spazio $z_1 = v_1 \Delta t + z_0$
4. poi aggiorno la velocità $v_2 = - g \Delta t + v_1$
5. quindi con questo nuovo valore di v si ricalcola il nuovo spazio $z_2 = z_1 + v_2 \Delta t$
6. poi si aggiorna la velocità $v_3 = - g \Delta t + v_2$
7. quindi ... si ritorna essenzialmente al punto 5

che in un linguaggio a noi noto: basic, fortran,pascal, c. potremmo sintetizzare nelle seguenti istruzioni:

condizioni iniziali
1. t =0 istante iniziale; sempre nullo
2. z =60 altezza iniziale in m
3. v_0 = 0 velocità di partenza
   inizia il ciclo
4. finchè z > o calcola
   ricavo la velocità all'istante t
5. $v = - g t + v_0$
   nuova posizione = vecchia più spostamento elementare
6. $z' = z + v\Delta t$
7. $t' = t + \Delta t$
   aggiorno t e s
8. t = t'
9. z = z'
10. print t, v,z
11. loop
12. end loop

si cicla sulle istruzione 4....11 fino a che s non diventa negativo. Il numero totale delle iterazioni dipende dal valore scelto per Δt.
Il valore di z ad ogni ciclo corrisponde con buona approssimazione al valore z=z(t) con $t=n\Delta t$, e l'ultimo valore di t corrisponde al tempo impiegato dal sasso per giungere a terra.
La procedura numerica non ci da direttamente una forma analitica della soluzione, tuttavia è in grado di fornirci numericamete una tabella z=z(t) con la precisione desiderata, purchè vi sia la disponibilità del tempo macchina (per il calcolo su indicato il tempo macchina dei pc di oggi, è insignificante!).

Il piano inclinato

Galileo usò un piano inclinato.
In un piano orizzontale la forza peso della pallina su appoggiata è controbilanciata dalla forza vincolare che nasce al punto di contatto pallina - piano; la pallina non è soggetta a nessuna forza netta e, purchè ci si limiti al moto sul piano, il suo stato di moto sarà di quiete se inizialmente era in quiete o di moto rettilineo uniforme se inizialmente era in moto (e se il piano è perfettamente liscio!).
Se il piano è inclinato la forza vincolare, che per sua natura è sempre perpendicolare al piano non può annullare la forza peso che invece punta sempre verticalmente verso il suolo! Allora come

facciamo? Dobbiamo imparare (anche velocemente) a scomporre la forza peso, usando la tecnica per la somma dei vettori, in una parte perpendicolare al piano su cui si muove la pallina ed una parte orizzontale allo stesso piano.
La procedura è la seguente:

1. Si annota θ l'agolo tra la forza peso e la normale al piano che è uguale all'angolo di inclinazione del piano,
2. si calcola la componente della forza peso perpendicolare al piano $P_T = - mg \cos(\theta)$
3. la componente orizzontale al piano è $F_p = P_p = - mg \sin(\theta)$

Ora la forza peso P_T è controbilaciata dalle forze vincolari del piano, mentre la F_p è la forza netta che agisce sulla pallina.
L'equazione $F_p = ma$, che descrive il moto lungo il piano, si scrive:

$$ma = - mg \sin(\theta)$$

che a parte il fatto che la forza è ridotta di un fattore $\sin(\theta)$, l'analogia con la equazione del moto scritta per il sasso in caduta libera è perfetta. Basterà sostituire $- g$ con $- g' =- g \sin(\theta)$
e la discussione è simile . Tutto va come se fossimo su di un'altro pianeta a gravità più bassa, per esempio sulla luna!

Forza costante

Se un punto materiale è soggetto ad una forza costante qualsiasi B, l'equazione è
$ma = F_0$ da cui $a= F_0/m$ dove F_0/m gioca lo stesso ruolo di g nella equazione studiata prima.
La soluzione generale per analogia è del tutto simile a 3) e 5) anche se si è persa la proporzionalità della forza con la m;

6)
$$v_x(t) = \frac{F_0}{m} t + v_0$$
$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m} t^2 + v_0 t + x_0$$

Forza elastica

La forza elastica di una molla di lunghezza di riposo x_0 è descrita dal modello

7) $$F = - K (x - x_0)$$

la molla si immagina bloccata da un lato in un punto fisso di un piano, l'altra parte è libera di contrarsi o allungarsi. Il modello di forza ipotizzato si riferisce ai movimenti piccoli rispetto alla elongazione di riposo della molla altrimenti antrano in gioco deformazioni inelastiche che non sono più descrivibili con la formula data.

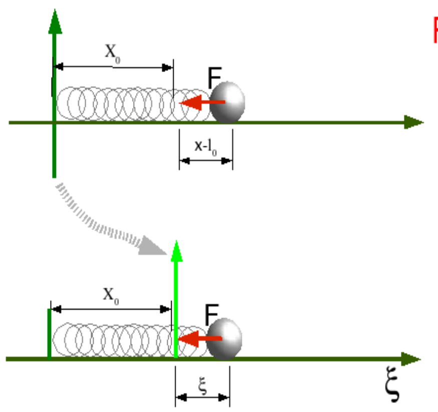
Quindi:
- la forza di una molla è proporzionale allo spostamento rispetto alla lunghezza di riposo,

A sin(%omega t+%phi)

- ha la direzione dell'asse della molla e
- ha il senso che tende a riportare la molla nel suo punto di riposo (segno negativo)
- k è la costante elastica della molla con [k]= [m s^{-2}] = [N L^{-1}]

nota:
Una molla con una costante elastica di 9.8 Newton per metro si allungherà di un metro se al suo estremo libero viene appeso, in campo gravitazionale terrestre, una massa di un kg.

L'equazione del moto, nota unidimensionale, è : $ma = -K(x - x_0)$



$$F = -k(x-x_0) = -k\xi$$

$$\xi = x - x_0$$

$$-k(x-x_0) = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2(x-x_0)}{dt^2}$$

$$-k\xi = m\frac{d^2\xi}{dt^2}$$

$$x(t) = \xi(t) + x_0$$

se mettiamo lo zero del sistema di riferimento proprio nel punto di riposo della molla (cioè trasliamo l'origine delle coordinate x in x_0 semplifichiamo l'equazione;

Ci ricorderemo solo alla fine di riportare le x in x- x_0

L'equazione tuttavia non è per niente banale, dovremmo conoscere anche qui la tecnica d'integrazione....non è ancora il nostro forte!
Soluzione classica

Dunque l'equazione e' del tipo $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$ una equazione differienziale che non sappiamo ancora come risolvere. Tuttavia si nota che la funzione x=x(t) che sara' soluzione della equazione deve essere tale che, se derivata due volte, corrisponde alla funzione stessa a meno di una costante moltiplicativa!. Per esempio le funzioni trigonometriche, seno e coseno, godono proprio della propieta' suddetta. Per questo immaginiamo una soluzione del tipo $x = A\sin(\omega t+\phi_0)$ e verifichiamo se e' buona giusto sostituendola nella equazione di sopra. Si ricava immediatamente che ponendo $\omega^2=k/m$ l'identita' e' soddisfatta! Le costanti A e ϕ_0 (fase) dovranno invece essere definite tenedo conto delle condizioni iniziali del moto: per esempio la x e la velocita' all'istante t=0, ma questo lo vedremo meglio anche avanti.

A sin(%omega t+%phi)

Esempio di calcolo completo:

impongo una soluzione tipica e la derivo una volta (v) e due volte (a)

$$x(t)=A\sin(\omega t+\phi)$$
$$v(t)=\dot{x}=A\omega\cos(\omega t+\phi)$$
$$a(t)=\ddot{x}=-A\omega^2\sin(\omega t+\phi)$$

sostituisco nella equazione del moto di sopra

$$-A\omega^2\sin(\omega t+\phi)=\frac{-k}{m}A\sin(\omega t+\phi)$$

l'uguaglianza è valida per ogni t se "

$$\omega=\sqrt{(\frac{k}{m})}$$

con le condizioni iniziali $x(0)=X_0$ e $v(0)=0$

$$x(0)=A\sin(\phi)=X_0$$
$$v(0)=A\omega\cos(\phi)=0$$

segue banalmente $\phi=\frac{\pi}{2}$ $A=X_0$

Il calcolatore

Abbianmo dei problemi con la matematica....

Usiamo allora il calcolatore e proviamo numericamente partendo con una velocità iniziale nulla, ma con una ξ iniziale pari a A_0. Come dire allontaniamo la pallina dalla sua posizione di riposo di A_0.

Per non appesantire usiamo nelle formule successive al posto di ξ la x, poi ci ricorderemo alla fine dello spostamento.

Condizioni iniziali all'istante t=0: v =0, x =A_0 ed ecco un pezzo di codice che potremmo scrivere

1. x=A_0
2. v=0
   inizio loop ricordo che a = - (k/m)x
3. finchè t<100 calcola
   nuova velocità= vecchia + incremento elementare = a dt
4. v' = v - (k/m)x Δt
   nuova x = vecchia + incremento elementare
5. x'= x + v Δt
   nuovo tempo
6. t' = t + Δt
   aggiorno x,v,t
7. x=x'
8. v = y'

9. t = t'
10. $X=x+x_0$

11. print t, X , v
12. end loop

La lista t, X , v ci darà una completa descrizione numerica del moto.
Ma si può capire meglio!

Approfondimento

Consideriamo le due istruzioni principali

9) $v' = v - (k/m)x\Delta t = v - \omega^2 x\Delta t$
$x'=x + v\,\Delta t$

che restituiscono i nuovi valori della velocità e del tempo dopo un intervallo di tempo elementare Δt.
Definiamo $\omega^2=k/m$ $[NL^{-1}M^{-1}]= [T^{-2}]$; dividiamo tutti i termini della prima equazione per ω e definiamo una nuova variabile generica $y=v/\omega$; segue:

10) $v'/\omega = v/\omega - x\,\omega\,\Delta t$ ---> $y' = y - x\,\omega\,\Delta t$
$x' = x + v\,\Delta t$ ---> $x' = x + y\omega\,\Delta t$

e scegliamo un punto x, y di partenza (del resto arbitrario) su di un piano in cui abbiamo fissato due assi di riferimento ortogonali (detto anche spazio delle fasi).
Il punto x,y individua un segmento che fa un angolo ϕ con l'asse x .
Il punto x',y' non è molto lontano da x,y (dipende da $\omega\Delta t$). Se i due punti (x,y) e (x',y') si uniscono con un segmento vedremo chiaramente che questo risulta perpendicolare a quello individuato da x,y.
Se si continua la procedura, si scopre che i vari punti (x,y) descrivono un cerchio di raggio $\rho^2=x^2+y^2$, e che dopo n iterazioni hanno disegnato approssimativamente un arco di circonferenza di angolo $\phi= - n\omega\Delta t$ (si ruota in senso orario).
Si ritorna al punto di partenza dopo aver coperto un angolo pari a 2π; pertanto il moto è ripetitivo e potremo scrivere per la x e le y le seguenti relazioni (coordinate polari)

11) $x = \rho\cos(\phi)$ con $\phi = - n\omega\Delta t$ ----> $\phi = - \omega t$ con $t = n\Delta t$
$y = -\rho\sin(\phi)$ -----> $v = -\omega\rho\sin(\phi)$

poi imponendo $n\omega\,\Delta t=2\pi$ si trova n tale che $\tau = n\,\Delta t= 2\pi/\omega$ è il periodo di un ciclo e che $\omega=2\pi/\tau$ il rapporto tra un angolo giro completo ed il tempo impiegato è la *velocità angolare* con cui varia la fase ϕ che descrive il moto.
L'ampiezza del moto è definita dal raggio r che dipende essenzialmente da quanto abbiamo stirato la molla all'inizio, invece ω= sqrt(k/m) è un parametro fondamentale del sistema, poichè fissa il periodo di oscillazione.
Le oscillazioni secondo la nostra equazione dovrebbero continuare indefinitivamente, ma in realtà a causa dell'attrito interno della molla o con la superfice del piano il moto, effetti non inclusi nella nostra equazione, si smorzeranno fino ad annullarsi.

Nota conclusiva

A sin(%omega t+%phi)

Potremmo continuare a studiare altri moti usando la stessa tecnica, ma nonostante essa sia potente nel calcolare numericamente le traiettorie di sistemi complessi, non è in grado di darci una completa descrizione analitica del moto. In effetti a noi mancano gli strumenti matematici, come il calcolo vettoriale, la derivata e l'integrale, che ci semplificherebbero la vita. Manca anche una migliore chiarezza di alcune grandezze cinematiche che abbiamo impiegato fino ad ora solo intuitivamente.
Nelle prossime lezioni pertanto, sarà nostra cura, rivedere alcuni aspetti formali e cinematici prima di procedere nell'analisi dinamica dei fenomeni.

Funziona!!!!!!!!!!!!!!!!!!

```
main (int argc, char *argv[])
{

 double dt,fi,x,t,v,a,w;
 double k=0.05, m=0.1;
 v=0.;
 x=1.;
 t=0.;
 Δt =0.1;
 w=sqrt(k/m);

 while (t<100.)
 {
  a= -k*x/m;
  v= v+a* Δt ;
  x=x+v* Δt ;
  printf("\n %10.5f  %10.5f    %10.5f    %10.5f %10.5f ", t,a,v,x,v/w);
  t+= Δt ;
 }

 cout<<"\n";
}
```