Pisa Novembre 2010
Cap.04.v10

Fisica _I

Primo semestre

Meccanica

Sistemi di coordinate e vettori

Sommario

Sistema di riferimento e sistema di coordinate

Un sistema di coordinate è l'insieme dei parametri utili per individuare la posizione di un mobile all'interno di un spazio di riferimento dato. Per esempio il nostro laboratorio individua uno spazio in cui noi operiamo, mentre i tre assi corrispondenti ai tre spigoli ortogonali della stanza laboratorio possono simulare, se graduati, il sistema di coordinate.

Possiamo usare nello stesso spazio di riferimento sistemi di coordinate diversi, come sistemi di coordinate cartesiane, sferiche, polari, cilindriche ed altre ancora!

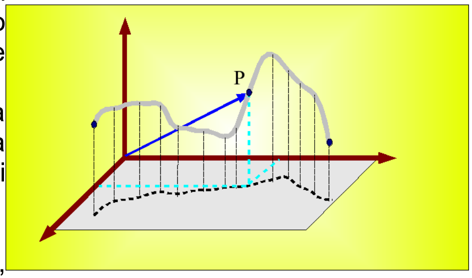
Iniziamo con il sistema di coordinate cartesiane.

La nostra auto si muove non solo in avanti o indietro, ma gira a destra e a sinistra e magari se in montagna, sale in alto e scende in basso. Quindi un moto ben più complesso di quello studiato nei capitoli passati.

Vediamo allora il moto su un tragitto a noi noto, la super starda Pisa-Firenze, che sarà il nostro spazio di riferimento ed in particolare fissiamo come riferimento tre punti: l'aereoporto di Pisa, Firenze e la Torre. Definiamo il *sistema di coordinate* con tre assi mutuamente perpendicolari che partono proprio dall'aereoporto di Pisa che, fra l'altro, considereremo l'origine del sistema di coordinate.

Un asse x che punta verso Firenze , un asse y a novanta gradi rispetto a x sul piano che va verso la Torre e un asse z verticale. Gli assi hanno lo zero nell'origine all'aereoporto e hanno impresse

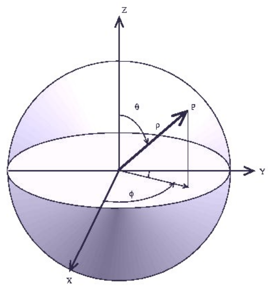
delle tacche grandi ogni chilometro, più piccole ogni cento metri e cosi' via fino ai decimi di millimetro... I numeri che scriveremo vicino ad alcune tacche per ricordarne la posizione rispetto all'aereoporto, saranno ordinati in modo crescenti sui semiassi, verso Firenze per x, verso la Torre per y e verso l'alto per la z.
Naturalmente sui semiassi opposti scriveremo numeri negativi e decrescenti allondanandosi dall'aereoporto. Ora ogni punto dello spazio può essere univocamente individuato da una *terna di numeri, <u>le sue coordinate</u>*, che ne individuano univocamente la posizione nello spazio, per esempio P =(x,y,z). La coordinata x, per esempio, è l'ascissa del punto di intersezione della perpendicolare all'asse x tracciata dal punto P; anche detta proiezione di P su x e cosi' via per le altre coordinate.



Se si conoscono le coordinate dei principali punti della nostra superstrada, per esempio ogni 10 metri, un esperto geometra può posizionare tutta la superstrada in un sistema virtuale di coordinate riportato su di una carta.
Nota:
Il sistema di coordinate tridimensionale, detto *cartesiano*, (destrorso) su descritto ha tre assi e non è certamente l'unico in grado di individuare la posizione assoluta del punto nello spazio di riferimento scelto. Per esempio il sistema di coordinate sferico basato su coordinate non omegenee, una lunghezza e due angoli, è altrettanto buono ed in alcuni casi può essere anche più utile.
Tuttavia si deve fare attenzione a non confondere il sistema di riferimento, che generalmente coincide, per esempio, con il laboratorio ed è unico, con i molteplici sistemi di coordinate usati per individuare la posizione di un punto del laboratotorio.

Coordinate sferiche

Un punto nello spazio può essere individuato anche in modo diverso; per esempio fissando prima la distanza assoluta del punto dall'origine e poi immaginando una sfera con quel raggio passante per il punto P (pensate ad un punto sulla terra ed al mappamondo). Fissiamo l'angolo θ corrispondente al parallelo passante per P e l'angolo ϕ del meridiano passante per P.
θ è detto anche *distanza (angolo) zenitale*, ϕ è detto *azimut o longitudine*.
Il raggio ρ e gli angoli θ e ϕ dette *coordinate sferiche* sono sufficienti per individuare la posizione assoluta di P nello spazio.
Lo stesso punto può essere individuato, con un sistema cartesiano con le tre coordinate x,y,z. Le tre coordinate cartesiane e quelle sferiche devono essere in stretta realzione se vogliamo che individuino lo stesso identico punto. In effetti possiamo scrivere le relazioni tra le coordinate cartesiane (il sistema cartesiano ha l'origine coincidente con il centro di simmetria del sistema di coordinate sferiche) e le coordinate sferiche;
1) Dove θ è misurato a partire dall'asse zeta, ϕ si misura sul piano xy a partire dall'asse x.



$$x=\rho\sin\theta\cos\phi \quad y=\rho\sin\theta\sin\phi \quad z=\rho\cos\theta$$

o inversamente

$$\rho=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)} \quad \theta=arcacos\frac{z}{\rho} \quad \phi=arcatan\frac{y}{x}$$

Nota:

Se immaginiamo di lavorare solo sul piano, possiamo usare oltre alle coordinate cartesiane x,y anche le coordinate polari (che sono praticamente corrispondenti a quelle polari con angolo θ fisso a π/2)

Coordinate polari

In uno spazio a due dimensioni si possono usare le coordinate cartesiane x,y o quelle polari ρ e ϕ. Ogni punto del piano può essere individuato dalla distanza ρ del punto dall'origine e dall'angolo ϕ tra il segmento che unisce P con l'origine e l'asse x, misurato in senso antiorario (cioè da x verso y). Sono le *coordinate polari* che banalmente sono legate a quelle cartesiane.

2)

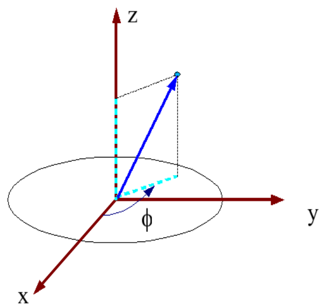
$$x = \rho \cos\phi$$
$$y = \rho \sin\phi$$
$$o \quad inversament$$
$$\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$
$$\phi = \arctan\frac{y}{x}$$

Cordinate cilindriche

Se alle coordinate polari si aggiunge una terza dimensione, z come altezza del punto dal piano x,y otteniamo le coordinate cilindriche

3)

$$\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$
$$x = \rho \cos\phi$$
$$y = \rho \sin\phi$$
$$z = h$$
$$o \quad inversament$$
$$\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$
$$\phi = \arctan\frac{y}{x}$$
$$h = z$$



Nota:
La scelta delle coordinate, in una rappresentazione o l'altra, dipende dalle caratteristiche del problema da risolvere; in genere saremo guidati dalle simmetrie più o meno marcate presenti nel problema.

Rappresentazione della strada

Chiediamo poi al geometra esperto di cartografia di rappresentare i punti principali della autostrada, in un sistema cartesiano, riducendo opportunamente la scala (per esempio un km in un cm, una riduzione da uno a centomila!), su di un foglio di carta. In effetti tre assi su di un foglio, che ha solo due dimensioni, sono difficili da rappresentare, tuttavia ci accontenteremo di una rappresentazione prospettica che ci dia l'illusione delle tre dimensioni.

Se il nostro geometra ha riportato un numero sufficiente di punti , la rappresentazione della nostra superstrada appare come una linea continua che alterna tratti rettilinei a curve a destra e sinistra, o a salite e discese fino a arrivare nel suo punto finale dove si trova Firenze.
Abbiamo la rappresentazione della strada.
Adesso vogliamo sapere come i nostri amici l'hanno percorsa, cioè vogliamo sapere la velocità a cui andavano in ogni suo punto. In effetti possiamo associare ad ogni punto della traiettoria un numero, cioè la velocità scalare calcolata con la procedura già discussa.
Cioè in ogno punto P (per esempio a Cascina) fissiamo un piccolissimo intervallo AB di spazio a cavallo di P e se sono stati annotati i tempi t_1 e t_2 all'inizio e alla fine dell'intervallo, valutiamo la velocità media nel punto in esame; naturalmente più l'intervallo AB è piccolo, minore è l'errore che facciamo nel valutare la velocità istantanea in P.
In effetti questo non è tutto, poichè sicuramente vogliamo anche sapere la direzione e senso. In effetti il segmento che unisce i due punti dell'intervallo che va da A a B, è un bel *vettore.*

Note sui vettori

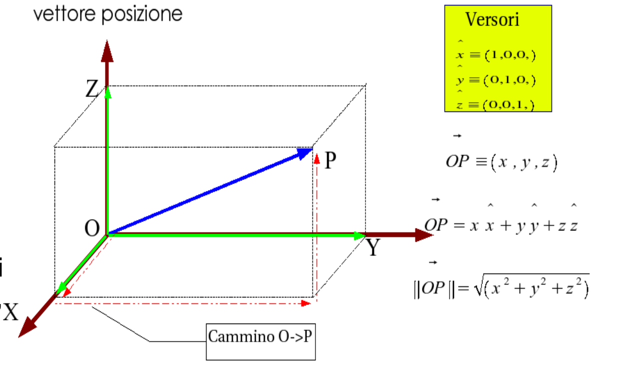
Lavoriamo in un sistema di coordinate cartesiane! Qui si visualizzano bene di vettori....
Il vettore è infatti una entità che da più informazioni: l'*intensità* (nel nostro caso la lunghezza in metri del tratto in esame), la *direzione* (cioè la direzione individuata dalla retta su cui si appoggia), ed il *senso* (il verso in cui viaggia l'auto). Il vettore può essere pensato applicato in un punto fisso o libero.....(vedi geometria) ed ha regole ben fissate di algebra per la loro composizione: *somma*, *moltiplicazione* per uno scalare, prodotto *scalare* e *vettoriale*.
Per esempio uno spostamento dal punto A al punto B è indicato dal segmento A-B che è proprio il vettore spostamento **AB** di *intensità* pari alla lunghezza AB, la *direzione* individuata dalla retta di cui fa parte il segmento stesso e il *senso* individuato dal verso in cui avviene lo spostamento.
Geometricamente si disegna il vettore come una freccia, o si indica con una lettera con una freccia in testa. Qui, nel testo, indicheremo i vettori in neretto.
Ogni vettore indica una grandezza ben precisa e quindi dimensionalmente deve corrispondere a quanto rappresenta: il vettore spostamento ha le dimensioni di una lunghezza, ma un vettore velocità ha come dimensioni una lunghezza diviso il tempo e cosi' via.

Nel seguito di questo capitolo indicheremo per semplicità i vettori con le loro conponenti con x,y,z, che sono tipiche variabili di lunghezza. Tuttavia in generale anche i vettori più complessi come vettore, velocità, accelerazione, forza etcc.. hanno le loro brave componenti x,y e z, infatti ogni vettore, in uno spazio tridimensionale, ha sempre *tre componenti*, cioè le proiezioni sugli assi di riferimento.
Attenzione un vettore di dimensioni diverse da quelle spaziali, per esempio il vettore velocità che ha dimensioni spazio su tempo [ms^{-1}], ha evidentemente le componenti con le stesse dimensioni in [ms^{-1}]! Quandi si parla di proiezione del vettore su di un asse, si pensa ad un sistema di riferimento che parte dall'origine del vettore ed è orientato come i tre assi spaziali ma che ha indicate le tacche in una metrica espressa, per le velocità, in [ms^{-1}], così che le proiezioni su ciascuna direzione indicano il valore numerico corretto.

Composizione dei vettori

Un punto P nello spazio è individuato dal *vettore posizione* **OP** rispetto al suo sistema di riferimento.

Per raggiunger P da O si percorre l'asse **x** per *x* e poi parallelamente a **y** per *y* e infine saliamo parallalamente a **z** per *z*.

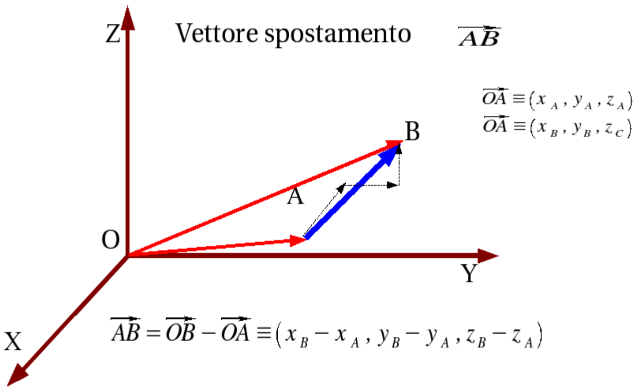


Consideriamo due punti generici A e B, questi sono allora individuati dai vettori **OA** e **OB**, che hanno rispettivamente le coordinate

1) **OA**≡(x_a,y_a,z_a) e **OB**≡(x_b,y_b,z_b)

Il *vettore spostamento* **AB** è definito da

2) **AB** ≡ (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)



Come dire che per raggiungere B partendo da A, possiamo immaginare di percorrere, prima lungo una retta parallela all'asse x un tratto x_b - x_a, poi nella direzione di y un tratto y_b - y_a ed infine lungo la direzione z il tratto z_b - z_a . Del resto è quello che facciamo continuamente in città per raggiungere un qualsiasi punto... tra palazzi e sensi unici siamo costretti a individuare cammini alternativi.....
Notiamo che la procedura suddetta è *comutativa;* cioè potremmo cambiare l'ordine di percorrenza dei vari tratti e rangiugeremmo sempre lo stesso punto finale.
Possiamo anche immaginare che i tre cammini su indicati siano individuati da tre vettori, il primo **X**$_{ab}$ parallelo all'asse x , il secondo **Y**$_{ab}$ all'asse y ed infine l'ultimo **Z**$_{ab}$ parallelo a z, tutte e tre spiccati a partire dall'origine.
Notare che i vettori sono entità che non hanno un punto fisso di applicazione. Il punto di applicazione, se necessario, deve essere esplicitamente indicato.

Somma

La *procedura somma* geometrica consiste (*regola del parallelogrammo*) nel disegnare sulla cima del primo vettore il secondo e sulla cima del secondo il terzo e cosi' via....
Possiamo immaginare di costruire il vettore **AB** sommando proprio i tre vettori elementari **X**$_{ab}$, **Y**$_{ab}$, **Z**$_{ab}$.
Se adesso congiungiamo il punto di partenza del primo vettore con la cima del terzo si ottiene il vettore somma che coincide praticamente con **AB** (nota i vettori sono scritti in grassetto nel testo, mentre nelle formule sono indicati con una freccia sulla testa). Formalmente

3) **AB = X**$_{ab}$ **+ Y**$_{ab}$ **+ Z**$_{ab}$

Il vetore **AB** risulta la diagonale del parallelogrammo solido, individuato dai tre vettori **X**$_{ab}$, **Y**$_{ab}$, **Z**$_{ab}$.

Ciascuno dei tre vettori sono a loro volta individuati da tre componeti, le proiezioni sugli assi. Poichè sono paralleli ad un asse, in effetti solo su questo hanno una componente non nulla e che coincide con la componente che abbiamo scritto per il vettore **AB**.

$$\vec{X}_{ab} \equiv (x_b - x_a, 0, 0)$$
$$\vec{Y}_{ab} \equiv (0, y_b - y_a, 0)$$
$$\vec{Z}_{ab} \equiv (0, 0, z_b - z_a)$$

Che possiamo esprimere sfruttando i *versori* degli assi, ovvero vettori paralleli agli assi di norma unitaria (il cappelleto ^ è convenzionalmente usato per indicare un vettore unitario)

$$\vec{X}_{ab} = (x_b - x_a)\hat{x}$$
$$\vec{Y}_{ab} = (y_b - y_a)\hat{y}$$
$$\vec{Z}_{ab} = (z_b - z_a)\hat{z}$$

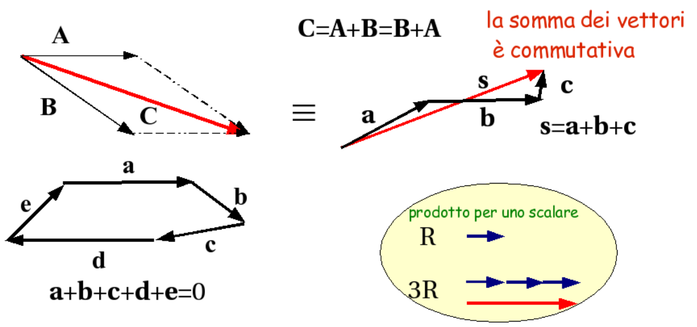
Matematicamente per la somma 3) si usa una procedura banale, *ogni componente del vettore **AB** è pari alla somma delle componenti corrispondenti dei vettori addendi.*

$$\begin{aligned} &\vec{AB} = c_x \hat{x} + c_y \hat{y} + c_z \hat{z} \\ &con \quad \hat{x} \;\; \hat{y} \;\; \hat{z} \quad versori \\ &con\ i\ coefficienti \\ &c_x = x_A - x_A \\ &c_y = y_A - y_B \\ &c_z = z_A - z_B \end{aligned} \qquad 4)$$

Nota:
La prima equazione delle 4) è del tutto equivalente come risultato finale alla 3). Qui abbiamo introdotto il *prodotto di un vettore per un coefficiente* che ha come risultato un vettore le cui coordinate (e la sua norma) risultano moltiplicate per lo stesso valore.

Ma la regola è più generale, essa vale per la somma tra vettori anche non ortogonali, voglio dire che lo spostamento da un punto A a B lo potreste scomporre in cammini che tra loro formano angoli diversi, anzi potresti fissare due direzioni qualsiasi sul piano (o tre nello spazio) e scomporre il moto lungo le direzioni scelte. Il vettore spostamento **C** è ancora la somma dei due vettori di prima.
La regola geometrica per la somma (ma anche per la differenza) è sempre la stessa, l*a regola del parallelogrammo.*

In conclusione, dati uno o più vettori applicati in un punto O, la loro somma si trova geometricamente disegnando (spiccando) uno dopo l'altro i vari vettori (devono avere la stessa direzione e senso dei corrispondenti vettori applicati in O) sulla "testa" del vettore somma parziale via, via ottenuto. I vettori che vanno invece sottratti vanno tracciati *in senso opposto a quello indicato dal vettore originario!*



Il vettore somma è individuato dal segmento orientato che va dalla base del primo vettore della catena alla "testa dell'ultimo disegnato". *Non c'e una regola fissa nell'ordine dei vettori; il risultato non cambia.*

Se l'ultimo vettore termina esattamente sulla base del primo, il circuito si chiude, e sostanzialmente scopriamo che dopo aver camminato molto siamo al punto di partenza!, *Quindi un circuito chiuso indica somma nulla.*

La norma (intensità del vettore)

Ricordiamoci la rappresentazione di **AB** in funzione delle tre componenti parallele agli assi. Il teoreme di pitagora ci insegna che il quadrato della lunghezza della diagonale è pari alla somma dei quadrati della lunghezze degli spigoli.

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_b - x_b)^2 + (y_b - y_b)^2 + (z_b - z_b)^2} \quad 5)$$

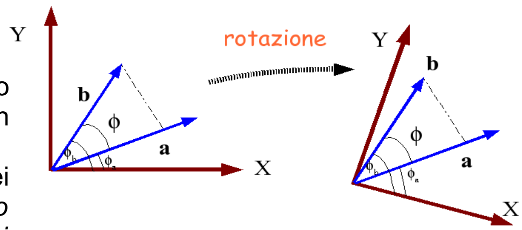
che è la norma del vettore.

Prodotto scalare

Possiamo definire il numero prodotto scalare la grandezza tra due vettori ***a*** *e* ***b*** *come la somma dei prodotti delle rispettive componenti:*

6)
$$n = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a\, b \cos(\phi)$$
$$dove\ \vec{a} \cdot \vec{b} \quad si\ legge\ \vec{a}\ scalare\ \vec{b}$$

a e b sono i moduli di **a** e **b** e ϕ è l'angolo individuato dalle direzione dei due vettori.



L'ultima termine può facilmente essere dimostrato guardando ad un disegno, anche bidimensionale, con due vettori **a** e **b** arbitrari.
Poichè il prodotto scalare dipende solo dalle intensità dei vettori dall'angolo relativo, non *cambia se noi rotiamo o trasliamo il sistema di coordinate o ambedue i vettori contemporaneamente*. Questo implica che il prodotto scalare è sostanzialmente un numero che non dipende dal sitema di di coordinate di riferimento e per questo lo si chiama *scalare*.[1]

Calcoli derivati dalle definizioni di sopra, con i vettori **a**=(a_x,a_y,a_z), **b**=(b_x,b_y,b_z), **c**=(c_x,c_y,c_z):

dato **c** , il suo modulo quadro è c^2 = **c** . **c**

7) se **c** = **a**+ **b** segue il modulo quadro è c^2 =**a.a** + 2 **a.b** + **b.b**
se **c** = **a** - **b** segue il modulo quadro è c^2 =**a.a** - 2 **a.b** + **b.b**

se i due vettori **a** e **b** sono ortogonali il prodotto **a.b** si annulla!

Defineremo altre quantità più avanti appena sarà necessario, adesso ritorniamo ai nostri problemi di cinematica.

[1] Una **grandezza scalare** è una grandezza fisica che viene descritta da un numero reale associato ad un'unità di misura ed è così definita, poiché il suo valore può essere letto su una *scala* graduata di uno strumento di misura e, contrariamente alle grandezze vettoriali, non necessita di altre informazioni per essere identificata.

Velocità vettoriale

Ma vediamo ancora meglio. Un punto A=(x_a,y_a,z_a) se lo riferiamo al punto centrale del sistema di riferimento O=(0,0,0) le cui componenti sono ovviamente nulle, ci appare come il vettore (spostamento) posizione **OA** . In questa luce il vettore **AB** corrisponde ovviamente alla differenza dei due vettori **OB**-**OA** che possiamo scrivere convenzionalmente **B** - **A** sopprimendo il riferimento comune all'origine "O" (o semplicemente **AB** intendendo il verso del vettore da A a B).

8.0) $$\vec{AB} \equiv (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (\Delta s_x, \Delta s_y, \Delta s_y)$$

Ora è facile vedere che in un moto rettilineo il vettore spostamento *elementare* Δ**s**=**AB** corrispondente ad un intervallo di tempo Δt, giace sulla retta del moto. La sua norma corrisponde al tratto percorso dal mobile nello stesso intervallo di tempo.

Dividendo le tre componenti del vettore **AB** per l'intervallo di tempo impiegato si ottiene un vettore velocità

8) $$\mathbf{v}^{ab}_m \equiv (v_x, v_y, v_z)$$

dove v_x, v_y, v_z sono le tre velocità scalari relative ai tre assi di riferimento che formano le tre componenti del *vettore velocità*. La lunghezza del vettore che è calcolabile con il teorema di Pitagora,

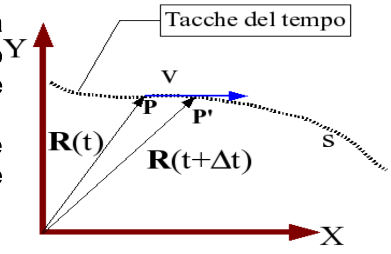
9) $$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{ds}{dt}$$

indica la velocità scalare del mobile. La direzione ed il senso del vettore mostrano invece la traiettoria e il senso di percorrenza. Il vettore si pensa applicato in un punto P della traittoria proprio per indicare lo stato di moto che ha il mobile nel punto in esame.

Nel caso di un moto con una traiettoria arbitraria il vettore spostamento **AB** corrisponde sempre ad una corda dell'arco di curva che contiene il nostro punto P in esame.
La procedura del limite mostra che il *vettore velocità* corrisponde alla velocità scalare ds/dt ed ha la direzione della *tangente alla traiettoria nel punto* in esame ed il *senso* da A verso B, se nel moto A precede B.

Legge oraria

Un vettore **PP'** è la differenza tra due vettori **OP** e **OP'**che indicano, in due istanti successivi separati da Δt, la posizione dell' auto sulla pista. Se indichiamo con una funzione vettoriale del tempo, **R**(t) il vettore posizione del punto mobile rispetto all'origine del sistema di riferimento, abbiamo che



10) **PP'** = **R**(t+Δt) - **R**(t) e ovviamente al limite per Δt -> 0 la velocità è **v** =d**R**/dt che si ottiene banalmente derivando indipendentemente le tre componenti del vettore **R(**t) e corrisponde al vettore 8).
R(t) compatta in una unica strutura le tre funzioni x(t), y(t), z(t) che descrivono l'andamento temporale delle *coordinate* del punto mobile :

11) **R**(t) ≡ (x(t), y(t), z(t))

Quelle tre funzioni (e la **R**(t) stessa funzione vettoriale) sono le *equazioni orarie* (o le equazioni parametriche, dove t è il parametro.....) del moto. In effetti il tempo t potrebbe essere pensato come una quarta coordinata (ricorda lo spazio (s,t)) .... ma uno spazio quadridimensionale per il momento non è proprio il nostro forte, e allora, potremmo pensare ad una coordinata curvilinea riportata lungo la traiettoria con una scala variabile che dipende dalla velocità con cui il mobile si muove in un dato punto; dove è più veloce *le tacche del tempo* saranno più distanziate, mentre là dove il mobile va lentamente, scopriremo una alta densità di tacche temporali successive in poco spazio.

=== Nota.
Non per essere pignolo, ma potremmo anche scrivere le equazioni parametriche del moto in funzione di un altro parametro. Per esempio lo spazio s percorso lungo il cammino è una buona funzione: Partiamo dall'espressione s = s(t), la invertiamo, ricaviamo t = t(s) e lo sostituimo nelle equazioni parametriche di sopra per ottenere : x(s),y(s),z(s) che sono le coordinate in funzione della distanza percorsa lungo il cammino.

Un esempio banalissimo è la rappresentazione parametrica della retta nello spazio.

$x = u_x s + x_0$
$y = u_y s + y_0$ oppure in forma compatta $\mathbf{P} = \mathbf{U}\, s + \mathbf{P}_0$ **U** è il versore della retta.
$z = u_z s + z_0$
dove s è proprio il cammino percorso lungo la retta a partire da un punto P_0 della retta.

Relazioni spazio - velocità: derivata e integrale

Adesso abbiamo gli strumenti per legare lo spazio e la velocità come già abbiamo fatto per la parte scalare. La *velocità vettoriale* si calcola derivando il vettore posizione del mobile lungo la traiettoria

$$\vec{R}(t) = \overrightarrow{OP} \equiv (x(t), y(t))$$
$$\vec{R}(t+\Delta t) = \overrightarrow{OP}' \equiv (x(t+\Delta t), y(t+\Delta t))$$

nel senso che le componenti di **v** corrispondono alle derivate delle componenti di **R** (vedi qui a lato per un vettore sul piano xy)
12)

$$\vec{v} = lim \frac{\vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t}$$

ovvero

$$lim \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{R}}{dt}$$

in generale

$$\frac{d\vec{R}}{dt} \equiv \left(\frac{dR_x}{dt}, \frac{dR_y}{dt}\right)$$

mentre l'opposto

13)
$$\vec{R}(t) = \int_0^t \vec{v}(t)\, dt + \vec{R}_0$$

è un integrale vettoriale che ci fornisce l'equazione (o le equazioni leggi orarie) una volte nota la velocità vettoriale in funzione del tempo. La formula 13) corrisponde (nello spazio) a tre equazioni scalari.
Esplicitare in coordinate ?

Accelerazione vettoriale

Ricordando la definizione di accelerazione è chiaro che anche essa, visto che dipende dalla differenza di vettori velocità, è un vettore. La relazione che dovremmo scrivere in genere è:

4)
$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

ed evidentemente si scopre che anche l'accelerazione media è un *vettore* che ci dà oltre alla *variazione in intensità della velocità nell'unità di secondo, anche la direzione ed il senso in cui essa avviene.*

Visto poi che la velocità è la derivata dello spazio rispeto alla velocità spesso scriveremo:

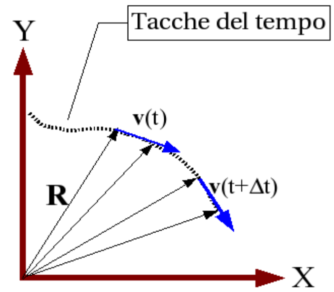
Derivate

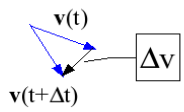
$$\vec{v} = \lim \frac{\vec{R}(t+\Delta t)-\vec{R}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\vec{V}(t) \equiv (v_x(t), v_y(t))$$

$$\vec{a} = \lim \frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

$$\vec{a}_m = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2}$$





e inversamente nota v(t) o a(t)......

$$\vec{R}(t) = \int_0^t \vec{v}(\tau)\,d\tau + \vec{R}_0 = \int_0^t \left(\int_0^\tau \vec{a}(t')\,dt' + \vec{v}_0 \right) d\tau + \vec{R}_0$$

dove $\mathbf{R}_0$ e $\mathbf{V}_0$ son due vettori noti che definiscono le condizioni iniziali del mobile.
Se è nota v(t)

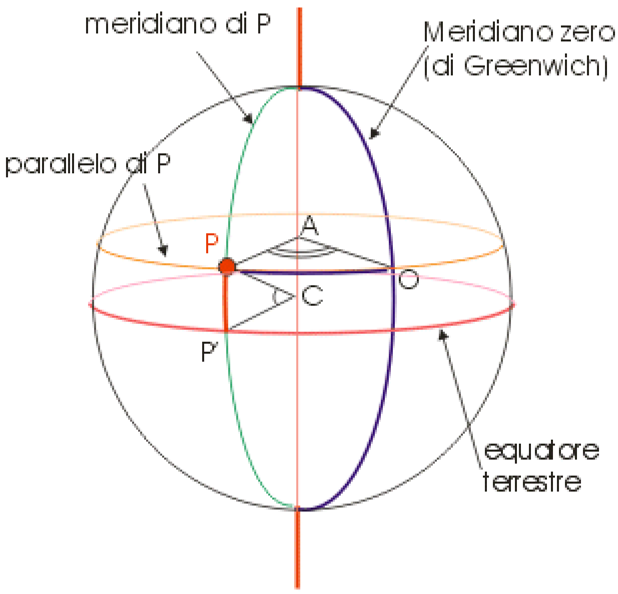
Sistema terrestre

Coordinate geografiche, latitudine e longitudine geografiche

Nel sistema di coordinate terrestri si seglie come *piano fondamentale* quello dell' equatore mentre la *direzione fondamentale* è l' asse di rotazione della terra. Si suppone che la superficie terrestre sia, in prima approssimazione, di forma sferica. Un qualunque piano che contenga l'asse terrestre (*piano meridiano*), determina sulla superficie terrestre un cerchio massimo passante per i poli detto **circolo meridiano**. Per **meridiano geografico** si intende una semicirconferenza compresa tra i due poli ed ogni meridiano ha un suo **antimeridiano** che completa il *circolo meridiano*, dalla parte opposta. I meridiani sono tutti uguali fra loro.I **paralleli** invece sono i circoli formati dall'intersezione tra qualunque piano parallelo all'equatore con la superficie terrestre. I paralleli sono tanto più piccoli quanto maggiore è la loro distanza dall'equatore.*Paralleli* e *meridiani* formano una rete sulla superficie (**reticolato geografico**), che ci permette di identificare la posizione assoluta di un punto. Per far questo basta indicare il *parallelo* e il *meridiano* che passano per tale punto (*parallelo del luogo* e *meridiano del luogo*). Allo scopo di indicare un preciso *parallelo* o *meridiano*, si definiscono le **coordinate geografiche**.

Viene fissato convenzionalmente un **meridiano fondamentale**, passante per l'Osservatorio astronomico di Greenwich, nei pressi di Londra. Tale meridiano è chiamato anche **meridiano zero**, **meridiano origine**, **primo meridiano**, **meridiano iniziale**, o **meridiano di Greenwich**. e rappresenta il riferimento per la suddivisione convenzionale in fusi orari e per il tempo universale.

La **longitudine** geografica è la distanza angolare di un punto dal *meridiano fondamentale*, misurata sull'arco di *parallelo* che passa per quel punto. Essa corrisponde all'angolo compreso tra il piano del *meridiano del punto* e il piano del *meridiano fondamentale*. Nel disegno qui a fianco, si tratta dell'angolo **PAO** dove **A** è un punto sull' asse terrestre appartenente al piano del parallelo di **P**. La *longitudine* può essere EST o OVEST a seconda che il punto si trovi a oriente o a occidente del *meridiano fondamentale*. Essa varia numericamente da 0° (per i punti che si trovano lungo il meridiano fondamentale) a 180°, in senso positivo verso OVEST e negativo verso EST.



La **latitudine** geografica è la distanza angolare di un punto dall'equatore misurata lungo il meridiano che passa per quel punto. Essa corrisponde all'angolo compreso tra la verticale del luogo e il piano dell'*equatore*. Nel disegno si tratta dell'angolo **PCP'** dove **C** è il centro della terra. Essa varia da +90° (polo nord) a -90° (polo sud). I punti lungo l'equatore hanno *latitudine* 0°. Vedi anchelatitudine astronimica.

Sia la *longitudine* (ϕ) che la *latitudine geografiche* (θ) vengono espresse in gradi e frazioni di grado.

I *paralleli* si possono considerare insiemi di punti sulla superficie terrestre che hanno uguale *latitudine* e i *meridiani* insiemi di punti con uguale *longitudine*. *Meridiani* e *paralleli* sono infiniti, ma spesso si usa prendere in considerazioni quelli che distano di un grado l'uno dall'altro. Essi sono detti *meridiani di grado* e *paralleli di grado*. Esistono 360 *meridiani di grado* e 178 *paralleli di grado* (escludendo i due paralleli ai poli, che sono ridotti ad un punto).

La parola *meridiano* deriva dal latino *meridies*, perché un meridiano unisce tutti i punti che hanno il mezzogiorno nello stesso momento