Pisa Ottobre 2010
Cap.02.v10

Fisica _I

Primo semestre

Meccanica

Cinematica - I parte

Sommario

Il tempo , una visione fisica....

Il tempo è un concetto difficile e certamente poco visualizzabile. A livello sensoriale, noi non siamo capaci di percepire il fluire del tempo, mentre invece siamo certamente in grado di renderci conto degli intervalli di tempo trascorsi.

In verità quello che riusciamo a cogliere sono le mutazioni di stato della materia o dell'ambiete materiale che ci circonda.

Pensate ad una lunga giornata di lavoro dall'alba al tramonto, oppure all'anno scandito dal cambiare delle stagioni, o anche al tempo trascorso in classe per seguire una lezione. Il “trasformarsi” dell'ambiente nella giornata, in un anno o in una lezione in cui siamo immersi, in “forme” via,via diverse, anima il nostro spazio di vita generando l'idea in noi dello scorrere del tempo e puntualizzando ogni attimo con un “prima ed un dopo” quella “forma”.

Ma come individuare la posizione di un “attimo” all'interno, per esempio, di un a giornata? E quanto è lunga una giornata dall'alba al tramonto?

Intanto, se ci limitiamo ad analizzare il periodo di luce nella giornata, non potremo fare a meno di notare che in alcuni periodi dell'anno il periodo di luce sembra più lungo che in altri momenti dell'anno. Occorre allora misurare in modo obiettivo e con più precisione la giornata e poi ci chiederemo anche quanto è lunga una giornata media?

Potremmo immaginare di far ricorso ad un'altro evento ripetitivo, di breve durata, che sembri segnare intervallati di tempo costanti.

Galileo usò anche il suo polso per determinare un piccolo intervallo! Ma ben presto si accorse che non erano certo quelli del polso gli intevalli di durata più costante.

Possiamo allora immaginare, come avranno fatto i nostri avi, di usare una clessidra, che simula con il cadere della sabbia lo scorrere del tempo (variazione quasi continua dello stato o "forma" della clessidra) e che determina con il periodo di svuotamento dell'ampolla superiore un intervallo temporale costante ripetibile facilmente.

Con questo in mente usiamo anche noi una clessidra e misuriamo la lunghezza del giornata contando le volte che dobbiamo capovorgerla dalla mattina alla sera. Durante l'anno troveremo valori leggermente diversi, ma potremmo definire la giornata come numero medio dei capovolgimenti giornalieri della clessidra contati in varie prove.

Se avessimo misurato il periodo necessario per una rotazione della terra, usando come partenza e fine dei capovolgimenti il momento in cui il sole è più alto in cielo, avremmo misurato la durata di un giorno completo e avremmo scoperto anche un numero più stabile nel tempo! Questo è quello che poi è stato fatto veramente.

Un dubbio! il tempo della clessidra è stabile? Lo possiamo verificare confrontando due clessidre con quantità di sabbia ben diversi. Scopriremo che il numero di capovolgimento della più piccola durante lo svuotamento della maggiore, è *praticamente costante* in tutte le prove. A meno che il tempo non venga miracolosamente dilatato o ristretto, non ci resta che accettare che il tempo fluisca in modo costante per tutti. Con questo assioma ragionevole, la misura della durata dello svuotamento della clessidra maggiore è indicata dal numero "n" dei capovolgimenti della piccola clessidra, oppure inversamente potremmo affermare che il tempo di svuotamento della clessidra minore è pari ad 1 /n dell'intervallo necessario per svuotare la clessidra maggiore.

Questo risultato ci tranquillizza sulla misura del giorno con il metodo della clessidra. La precisione purtroppo non sarà certo la migliore possibile!

Un "attimo" nella giornata potrà allora essere individuato dal numero che corrisponde ai "capovolgimenti" necessari per raggiuingere quell'attimo a partire dell'alba della nostra giornata di lavoro.

Al posto della clessidra potremmo usare un'altro oggetto con moto periodico, a frequenza maggiore, come un pendolo che compie una oscillazione completa in un intervallo abbastanza breve. Galilei, ricorda!, scoprì l'isocronismo del pendolo!... E da allora in poi gli intervalli di tempo sono stati misurati con i gloriosi orologi a pendolo che già allora raggiungevano una ottima precisione.

Oggi si usa un fenomeno legato agli atomi, cioè la loro frequenza di oscillazione che è altissima e stabile e ci permette misure temporali di grande precisione.

In conclusione abbiamo capito che per misurare il tempo occorre riferirsi ad un evento naturale che cambia il suo "aspetto" percorrendo una serie di stati che *vengono periodicamente ripetuti sempre uguali a se stessi. Il periodo di tempo impiegato per un ciclo completo determina l'intervallo elementare che potremo usare (in accordo internazionale) per le nostre **misure di tutti i giorni**.*

Cinematica del punto

La *cinematica* studia il movimento geometrico dei corpi senza entrare nel merito delle cause che ne determinano la traiettoria.
Le cause del moto sono invece oggetto della *dinamica* che vedremo più avanti.

La velocità scalare

Un elemento base del moto è la misura della rapidità con cui un mobile si sposta da un luogo ad un altro. La *velocità* è la grandezza il cui valore esprime il concetto di rapidità su menzionato.
Comunemente parlando diremo di aver impiegato, per esempio 45 minuti, per recarsi in auto da Pisa a Firenze. Se non diamo altri dettagli, il nostro amico che ci ascolta e che sa bene che Pisa dista da Firenze di circa 90 Km, scoprirà, dividendo lo spazio percorso per 45, i minuti impiegati, che abbiamo viaggiato sulla superstrada percorrendo 2 Km il minuto e ciè pari a 120km all'ora, rischiando una buona multa!. Per dirla un pò meglio, parleremo di una *velocità media* di 120 Km all'ora e se vogliamo esprimerla in metri al secondo diremo

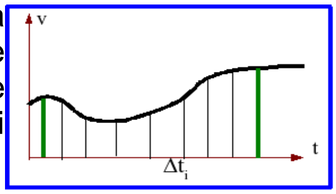
$$v_m = 90000\ m/(45*60\ s) = 33.33\ m/s \quad [LT^{-1}]$$

In effetti abbiamo pensato fino ad ora ad un moto *uniforme*, come se avessimo viaggiato sulla superstrada a velocità costante, il che mi sembra molto improbabile! Forse ci siamo fermati per far benzina o abbiamo frenato od aumentato l' andatura più volte per adattarsi al flusso delle altre auto. Tuttavia, mediamente, ci siamo mossi alla velocità su indicata, che in definitiva esprime bene la brillantezza del nostro moto.

Ma un pignolo, visto che abbiamo in verità a che fare con un *moto vario*, avrebbe potuto preferire sentir dire, che nel tratto Pisa - Ospedaletto abbiamo viaggiato a 60 Km/ora, nel tratto Ospedaletto-Pontedera a 150 km/ora, quindi a 90 km/ora........., insomma una descrizione più dettagliata del moto, purtroppo senza ancora un rigore scientifico e quindi sempre indicativa a meno che ....a meno che il dettaglio non si spinga fino a dare un informazione *puntuale della velocità*. Voglio dire che potremmo richiedere i valori della velocità istantanea "v" in ogni punto del cammino a partire dall'aereoporto di Pisa dove inizia la superstrada. Insomma una vera propria tabella dettagliata del tipo v = v(t).
Ecco qui abbiamo il primo scoglio, cosa è la *velocità nel punto* o meglio la velocità istantanea? come calcolarla? Il metodo è alla fine quasi banale.

Prendiamo lungo il percorso due punti abbastanza vicini e distanti per esempio cento metri. Con un cronometro prendiamo il tempo all'inizio del tratto t_1 ed il tempo giusto alla fine t_2 e magari scopriamo che la differenza $t_2 - t_1$ è di dieci secondi. Con buona approssimazione, in quei cento metri la nostra macchina, potrebbe aver mantenuto una velocità costante, quindi il valor medio della velocità : $v_m = 100/(t_2 - t_1) = 100/10 = 10$ m/s (36 km/ora), corrisponde quasi alla velocità istantanea dell'auto in ogni punto del suddetto tratto. Ma se non siamo ancora sicuri, si può considerare un tratto ancor più breve, 1 m, e saremo più convinti di non fare un grosso errore se riporteremo agli amici la velocità media calcolata nel suddetto tratto come la velocità istantanea dell'auto nel centro di quella piccola zona del cammino. D'altra parte la distanza Pisa - Firenze è di 90000 metri e noi stiamo indicando la velocità della nostra auto in uno di quei novantamila metri da percorrere!!

Il pignolo obietterà che in principio ci può essere ancora una differenza da quanto calcolato e il valore della velocità tenuta dall'auto per esempio nel centro C del suddetto tratto di un metro. Allora usiamo una tecnica matematica che ci da' la risposta esatta. Calcoliamo e scriviamo su di un pezzo di carta la serie dei v_{mi}, definite come il rapporto tra la distanza di due punti presi a cavallo di C e l'intervallo di tempo $t_{i+1} - t_i$ impiegato per percorrerlo



$$v_{mi} = \frac{s(t_{i+1}) - s(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

s(t) è il cammino percorso dalla partenza.

e avremo cura di prendere gli intervalli temporali sempre piu' piccoli. Naturalmente faremo attenzione a scegliere t_i sempre un istante prima di passare il centro C e t_{i+1} subito dopo. Ben presto al diminuire dell'intervallo temporale i numeri della lista si stabilizzano, cioè nonostante si diminuisca l'intervallo di misura Δt, i valori di v_i^m non cambiano più . Diciamo che l' ultimo valore della lista, ormai stabile, rappresenta la velocità limite della procedura e sara' detta la *velocità istantanea* del nostro mobile nel punto C.
Matematicamente si scrive che v è il limite del rapporto incrementale:

$$v = \lim_{t_{i+1} - t_i = \Delta t \to 0} v_{mi} = \lim \frac{s(t_{i+1}) - s(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

in pratica è la definizione di *derivata dello spazio rispetto al tempo* che, come ben noto, (introducendo il differenziale ds e l'infinitesimale dt) si scrive:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Da approfondire meglio in sede di analisi matematica!!!
E' la velocità che in definitiva leggiamo sul tacchimetro della nostra auto, uno strumento che dovrebbe misurare con buona approssimazione la velocità istantanea. Sarà perfetto ?

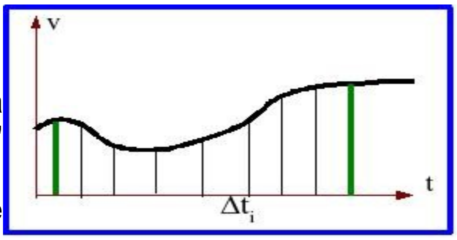
La legge oraria e grafici

In effetti, incosciamente, abbiamo introdutto una funzione *derivabile* del tempo, la funzione spazio s(t) che potremmo usare per descrivere dettagliatamenta il moto del nostro mobile lungo la sua traiettoria. s(t) è una (tabella oraria) funzione definita su di un sistema di riferimento con ascissa curvilinea come certamente è quello di una qualsiasi strada (di campagna e non) ; le tacche che individuano la coordinata, o la distanza della nostra auto dall'inizio, sulla strada sono rappresentate dalle pietre miliari, poste ogni chilometro o addirittura ogni cento metri (possiamo imaginare di avere una pietra miliare per metro!).

La funzione s(t) in alcuni casi semplici si può facilmente esplicitare analiticamente.
Per esempio, nel caso del moto uniforme (v =velocità costante), lo spazio percorso è propozionale a v :

$$s(t)= v\, t +s_0$$

dove s_0 è lo spazio già percorso prima dell'istante iniziale. E' quasi banale, e` una relazione lineare tra lo spazio ed il tempo: *ad uguali intervalli di tempo corrispondono tratti di spazi percorsi uguali.*



In generale non vale quanto su espresso e la relazione e' piu' complicata, ed il grafico appare come il grafico qui a lato che rappresenta una relazione tra spazio e velocita' del tutto generale.
In ogni caso il grafico rappresenta la formula s=s(t), che esprime la *legge oraria* del moto di un corpo.

Lo spazio

Una volta nota la velocità, dovrà essere possibile ricavare gli spazi percorsi. *E' il problema inverso di quello di prima.*

Per esempio se ci muoviamo a 30 Km/ora fissi e abbiamo viaggiato per due ore e mezzo , sarà un gioco da bambini ricavare s= 30 * 2.5 = 90 km.
Ma supponiamo ora di avere solo la lista completa delle velocità in funzione del tempo, cioè un grafico (v,t), ci domandiamo quale è lo spazio percorso in un intervallo di tempo $t_2 - t_1$? La velocità non è costante e pertanto non possiamo procedere come sopra. Allora dividiamo il nostro intervallo in sotto intervalli piccolissimi, tanto da sperare di avere la velocità constante in ogni sotto intervallo. Per ciascuno di essi calcoliamo $\Delta s_i = v_i \Delta t_i$ lo spazio percorso e sommiamo su tutti i sottoinrevalli, così:

$$S=\sum_1^n \Delta s_i+S_0=\sum_1^n v_i \Delta t_i+S_0$$

che corrisponde approssimativamente all'area del trapezoide della figura più lo spazio S_0 già percorso al tempo t_1 .
Spingendo il calcolo al limite, per intervalli Δt -> dt , per evitare o annullare gli errori di arrotondamento, scriveremo

$$S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt+S_0$$

l'integrale della velocità rispetto al tempo; del resto la velocità è stata definita come la derivata dello spazio rispetto al tempo...

Accelerazione scalare

Il moto rettilineo uniforme (cioè velocità costante) è un caso particolare di tutti i possibili moti. In verità abbiamo sempre a che fare con un moto vario che cambia in velocità ed in direzione. Sentiamo parlare allora di accelerazione o decelerazione per indicare una variazione più o meno rapida della velocità di un mobile. Un auto che con partenza da fermo raggiunge i 100 km /ora in dieci secondi ha una accelerazione piuttosto buona, e possiamo dire che in media incrementa (o varia) la sua velocità ogni secondo di circa 10 km/ora .
L'*accelerazione media* è definita operativamente come il rapporto tra la variazione di velocità tra un istante iniziale ed uno finale ed il tempo in cui è avvenuta.
L'esatta definizione della *accelerazione media* emerge chiaramente dalla seguente formula:

1) $$a_m=\frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}$$ con dimensioni $[LT^{-2}]$

dove t_1 e t_2 sono gli istanti iniziali e finali del tempo di osservazione.
Qui le velocità sono numeri (scalari) e quindi qui l'accelerazione media è una quantità scalare che indica, se positiva, un aumento della velocità , se negativa una decelerazione del moto lungo la traiettoria prefissata.
L'accelerazione media non può corrispondere al valore dell'accelerazione in un istante preciso a meno che l'accelerazione stessa non sia costante in tutto l'intervallo di tempo.
Narturalmente è possibile calcolare l'accelerazione in un istante t con la stessa procedura su indicata per le velocità e con una precisione assoluta. Il metodo consiste nello scegliere l'intervallo di tempo $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ a cavallo dell'istante t tanto piccolo che in esso vi sia una variazione uniforme della velocità. Il rapporto tra la variazione totale $v_{i+1} - v_i$ e l'intervallo di tempo Δt ci dà con ottima approssimazione il valore della accelerazione in t. L'ottima approssimazione diventa esatta se si immagina di far tendere l'intervallo di osservazione praticamente a zero.
C'è un rigoroso procedimento matematico che in effetti ci fornisce la soluzione su di un piatto d'argento: è la stessa procedura del limite e della derivata. Possiamo infatti definire l'accelerazione come

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(v_{i+1} - v_i)}{(t_{i+1} - t_i)} = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Ecco quindi la forma differenziale :

$$a = \frac{d\,v(t)}{dt}$$

che possiamo anche indicare come la *variazione delle velocità per unità di tempo*. Ricordando che v è la derivata della funzione spazio possiamo scrivere la relazione

$$a = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$

che lega l'accelerazione alla *derivata seconda dello spazio rispetto al tempo*.

Nota:

Il termine di *velocità media* è chiaro? l'abbiamo usato pensando di conoscerne intuitivamente il significato. Comunque vediamo qui meglio.
Definiamo come media di una grandezza la quantitità

$$v_m = \frac{1}{n} \sum_{1..n} v_i$$

Sommando su tutte le misure osservate. Ma bisogna essere più corretti dando più peso ai valori osservati più a lungo.

$$v_m = \frac{1}{T} \sum_{1..n} v_i t_i \quad e \quad T = \sum t_i \qquad segue \qquad v_m = \frac{1}{T} \sum_{1..n} s_i = \frac{S}{T}$$

Sostituendo v_i con le definizioni date per le velocità negli intervalli t_i ($v_i = s_i/t_i$) si ricava la giusta definizione di v_m per l'intervallo globale T.

Nota:
La velocità e l'accelerazione così come le abbiamo definite non sono del tutto soddisfacenti poichè, come vedremo presto, non ci forniscono tutte le informazioni necessarie per descrivere completamente il moto di un mobile. L'informazione è invece parziale e per questo la indicheremo come *velocità o acceleratore scalare* in contrasto alle prossime definizioni di *velocità o accelerazione vettoriale.*
